

ELZE, HANS-THOMAS

DISS. FRANKFURT am MAIN QU

1985

Quantenstatistik und innere Symmetrien
- die $SU(3)$ -Color-Symmetrie im Quark-Glue-Plasma

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
beim Fachbereich Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von

Hans-Thomas Elze

aus

Frankfurt

Frankfurt am Main

1985

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Dekan : Prof.Dr.B.Lüthi

Leiter der Arbeit : Prof.Dr.W.Greiner

Erstgutachter : Prof.Dr.W.Greiner

Zweitgutachter : Prof.Dr.J.Rafelski

Tag der mündlichen Prüfung :

4. Februar 1985

ONE PLUS ONE

Jean-Luc Godard (1968)

Zusammenfassung

Gegenstand der nachfolgenden Arbeit ist eine gruppentheoretische Projektionsmethode, die es ermöglicht, exakt erhaltene innere Symmetrien bei der quantenstatistischen Beschreibung von Vielteilchensystemen zu berücksichtigen. Sie wird auf die $SU(3)$ -Color-Symmetrie von Quarks und Gluonen angewendet, um thermodynamische Eigenschaften kleiner, farbloser Quark-Gluon-Tröpfchen zu untersuchen. Darauf aufbauend wird ein Tröpfchenmodell des Phasenübergangs zwischen einem Mesonengas und dem Quark-Gluon-Plasma entwickelt.

Inhaltsverzeichnis

1. <u>Einführung</u>	...1
1.1 <u>Ideale Quantengase mit $U(1)$-Symmetrien</u>	...4
1.2 <u>Ein vereinfachtes Modell des Quark-Glue-Plasmas</u>	..13
2. <u>Die gruppentheoretische Projektionsmethode</u>	..23
2.1 <u>Allgemeine Darstellung der Projektionsmethode für die innere Symmetriegruppe $SU(N)$</u>	..23
Ausblick auf die Behandlung wechselwirkender Systeme.	..29
2.2 <u>Die Isospinsymmetrie und Bemerkungen zur Symmetriegruppe $U(1) \times SU(N)$</u>	..33
3. <u>Die $SU(3)$-Color-Symmetrie von Quarks und Gluonen</u>	..38
3.1 <u>Gruppentheoretische Hilfsmittel für die $SU(3)$-Gruppe</u>	..39
Die Berechnung der Charaktere mit Hilfe von Tensoren.	..39
Die Orthogonalitätsrelation der Charaktere.	..51
Die generierende Funktion für Quarks und Gluonen bei endlicher Baryonenzahldichte.	..53
Physikalische Interpretation der generierenden Funktion.	..60

3.2 <u>Die Zustandssumme für ein farbloses Quark-Glue-Plasma</u> und thermodynamische Eigenschaften kleiner Tröpfchen	...73
Numerische Auswertung der Zustandssumme und Berechnung thermodynamischer Zustandsgrößen.	...81
Näherungsweise analytische Berechnung der Zustandssumme für ein farbloses Quark-Glue-Plasma	...93
A) Die Sattelpunktsnäherung.	...94
B) Eine qualitative Näherungsformel für $Z(0,0)$.	...95
4. <u>Quark-Glue-Plasmatröpfchen</u>	..101
4.1 <u>Der Stabilitätsbereich isolierter Plasmatröpfchen</u>	..101
4.2 <u>Ein Tröpfchenmodell des Phasenübergangs</u> zwischen Mesonengas und Quark-Glue-Plasma	..105
Berechnung von Clusterverteilungen.	..123
5. <u>Was zu tun bleibt</u>	..128
Literaturverzeichnis	..130
Lebenslauf	..134
Danksagung	..136

1. Einführung

In vielen Teilgebieten der theoretischen Physik werden Vielteilchensysteme (typischerweise $N \approx 10^1 \dots 10^{23}$) mit statistischen Methoden untersucht - etwa in Festkörperphysik, Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik. Neben den allgemeinen Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Drehimpuls, die die Invarianz eines abgeschlossenen Systems gegenüber Rotationen und Translationen in der Raum-Zeit ausdrücken, gelten im Einzelfall meist weitere Erhaltungssätze, die durch die Dynamik bzw. Symmetrieeigenschaften des betrachteten Systems bestimmt werden. Zum Beispiel besteht ein Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladungserhaltung und der lokalen $U(1)$ -Eichsymmetrie der Maxwell'schen Theorie; ferner müssen auch die diskreten Symmetrien eines Kristallgitters etwa ein Abbild in Eigenschaften des entsprechenden Hamilton-Operators finden.

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie solche inneren Symmetrien in der statistischen Beschreibungsweise eines Vielteilchensystems berücksichtigt werden können. Im Rahmen der Quantenstatistik kann man das Problem so formulieren: wie läßt sich ein Hilbert-Raum aus genau den Vielteilchenzuständen konstruieren, die eine jeweils vorgegebene Symmetrie besitzen? - Als Beispiel möge hier zunächst das einfache Modell eines idealen Fermi-Gases von Nukleonen für die Atomkerne dienen; eine wichtige Größe für etwaige Anwendungen des Modells ist die Anzahl der unabhängigen Einteilchenenergieniveaus in Abhängigkeit von Energie und Gesamtspin des Kernes [1]. Es ist also hierbei insbesondere die Forderung zu erfüllen, daß der Gesamtzustand einer gewissen Anzahl von Nukleonen zu einem bestimmten Multipllett der Rotations- bzw. $SU(2)$ -Gruppe gehört. - Weiterhin besteht z.B. in der Physik der starken Wechselwirkung das bisher ungelöste Problem des "Confinement", nämlich zu verstehen, warum in der Natur keine freien "Color"-Ladungen beobachtet werden können. Als lokale Eichsymmetrie der Quantenchromodynamik (QCD) wird die nicht-abelsche $SU_c(3)$ -Gruppe zur Beschreibung der Wechsel-

wirkung von Quarks und Gluonen angenommen [2]; die beobachteten Zustände von aus Quarks aufgebauten Hadronen und ggf. in relativistischen Schwerionenstößen erzeugten Quark-Glue-Plasmatröpfchen scheinen sich alle wie das Singlett der zugrundegelegten Symmetriegruppe zu verhalten! Daher wird die zu entwickelnde Quantenstatistik bei innerer Symmetrie eine wichtige Anwendung darin finden, die Konsequenzen zu untersuchen, die sich aus dem Confinement eines Quark-Glue-Plasmas für seine thermodynamischen Eigenschaften ergeben.

Im folgenden Abschnitt wird ein einfaches Beispiel zur Einführung in die im Kapitel 2 entwickelte allgemeine Projektionsmethode für beliebige $SU(N)$ -Gruppen dargestellt außerdem ein grob vereinfachtes Modell des Quark-Glue-Plasmas mit einer diskreten Symmetrie. Die Kapitel 3 und 4 haben die Untersuchung der $SU_c(3)$ -Symmetrie von Quarks und Gluonen zum Gegenstand und von deren Einfluß auf thermodynamische Eigenschaften der Plasma(tröpfchen)phase.

Abschließend seien einige in diesem Zusammenhang nützliche Ensembles angegeben, die je nach Fragestellung für die statistische Behandlung eines Vielteilchensystems vorteilhaft sind [3]:

- A) das mikrokanonische Ensemble; Impuls, Energie und alle weiteren "guten" Quantenzahlen (Ladungen) des Systems werden exakt erhalten;
- B) das kanonische Ensemble; (Dreh-)Impuls und Energie E werden im Mittel erhalten durch die Einführung der Temperatur T entsprechend einer mittleren Anregung des Systems, weitere Quantenzahlen werden exakt erhalten;
- C) das großkanonische Ensemble; wie B), aber auch die übrigen Quantenzahlen Q_i werden nur im Mittel erhalten mit Hilfe von chemischen Potentialen μ_i .

Hauptaufgabe der statistischen Thermodynamik ist die Be-

rechnung der für das betreffende Ensemble charakteristischen Zustandssumme Z , aus der sämtliche Informationen über die thermodynamischen Eigenschaften des Systems durch partielle logarithmische Ableitungen nach den Zustandsvariablen gewonnen werden können; durch die Angabe der Variablen wird das jeweilige Ensemble eindeutig festgelegt.

Die physikalischen Einheiten sind definiert durch:

$$h = c = k_B = 1 .$$

1.1 Ideale Quantengase mit U(1)-Symmetrien

Als einfaches Beispiel zur Erläuterung einer wesentlich allgemeineren Projektionsmethode möge die Untersuchung eines idealen Quantengases dienen, das der Fermi-Dirac- bzw. Bose-Einstein-Statistik gehorcht. Die einzelnen Quanten tragen eine einfach additive (elektrische, baryonische, seltsame o.ä.) Ladung q . Für ein relativistisches System - i.e. bei Temperaturen, die in der Größenordnung der Ruhemasse der Teilchen liegen oder darüber - ist die Teilchenzahl keine Erhaltungsgröße mehr, da etwa in einem (Elektron-Positron-)Plasma, das mit seiner Umgebung in thermischem Gleichgewicht steht, Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt und vernichtet werden. Gemäß der hier vorausgesetzten U(1)-Symmetrie bleibt aber die Gesamtladung erhalten; diese Tatsache soll jetzt bei der Berechnung der kanonischen Zustandssumme $\mathcal{Z}_Q(T,V)$ für ein solches Plasma berücksichtigt werden. Es gilt:

$$(1.1) \quad \mathcal{Z}_Q(T,V) \equiv \frac{1}{Q} e^{-\beta \hat{H}} \quad ,$$

dabei ist die Spur nur über solche (Vielteilchen-)Zustände zu bilden, die die Gesamtladung Q aufweisen; $\hat{H}$ ist der Hamilton-Operator des Systems im Volumen V und $\beta \equiv T^{-1}$. Unter Vernachlässigung der Wechselwirkung, $\hat{H} \equiv \hat{H}_0$, läßt sich die Spur in der Besetzungszahldarstellung auswerten, da $\hat{H}_0$ in ihr diagonal ist:

$$(1.2) \quad \mathcal{Z}_Q(T,V) = \sum_{\{n_k, \bar{n}_k\}; Q} e^{-\beta \sum_k \epsilon_k (n_k + \bar{n}_k)} \quad ,$$

wobei ϵ_k die i.A. volumenabhängigen Einteilchenenergieniveaus und n_k ($\bar{n}_k$) die Besetzungszahlen dieser (Anti-) Teilchenniveaus bezeichnen. Ein zusätzlicher Beitrag im Exponenten in Glg.(1.2), der von den Nullpunktsschwingungen herrührt, wurde außer Acht gelassen, da er von der zu erörternden Ladungserhaltung unabhängig ist. Die Summe ist über alle diejenigen Verteilungen von Besetzungszahlen auszuführen, die mit der Nebenbedingung vorgegebener Ge-

samtladung und der jeweiligen Statistik verträglich sind. Die Nebenbedingung, $\alpha - q \sum_k (n_k - \bar{n}_k) = 0$, kann mit Hilfe einer Kronecker- δ -Funktion ausgedrückt werden (Antiteilchen tragen die Ladung $-q$):

$$(1.3) \quad Z_Q(T, V) = \sum_{\{n_k, \bar{n}_k\}} \delta(\alpha - q \sum_k (n_k - \bar{n}_k)) e^{-\beta \sum_k \epsilon_k (n_k + \bar{n}_k)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi \alpha} \sum_{\{n_k\}} e^{-\sum_k (\beta \epsilon_k - i q \varphi) n_k} \sum_{\{\bar{n}_k\}} e^{-\sum_k (\beta \epsilon_k + i q \varphi) \bar{n}_k}.$$

Es sei bemerkt, daß der Faktor, der die Summation über die Besetzungszahlverteilungen der Antiteilchen beinhaltet, genau konjugiert komplex zu demjenigen der Teilchen ist, was von dem entgegengesetzten Ladungsvorzeichen herrührt; diese Tatsache wird noch häufig in Erscheinung treten und der entsprechende Antiteilchenterm der Kürze halber dann als "c.c." hingeschrieben. Die möglichen Besetzungszahlen sind $n_k = 0, 1$ für Fermionen ($\sigma = +1$) und $n_k = 0, 1, 2, \dots$ für Bosonen; es ist :

$$(\hat{\sigma} = +1) \quad \sum_{n=0}^1 x^n = (1+x)^{+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1} \quad ; \quad (|x| < 1)$$

man erhält damit aus Glg.(1.3):

$$(1.4) \quad Z_Q^{(\sigma)}(T, V) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi \alpha} \prod_k (1 + \sigma e^{-\beta \epsilon_k + i q \varphi})^{\sigma} \cdot (\text{c.c.})^{\sigma}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi \alpha} e^{\sigma \sum_k [\ln(1 + \sigma e^{-\beta \epsilon_k + i q \varphi}) + \text{c.c.}]}$$

$$\equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi \alpha} \tilde{Z}^{(\sigma)}(T, V; \varphi) \quad .$$

Dieser Ausdruck für $Z_Q(T, V)$ weist bereits die Struktur eines Projektionsintegrals über eine neue "erzeugende Funktion" $\tilde{Z}(T, V; \varphi)$ auf, die hier direkt durch die explizite Berücksichtigung der Ladungserhaltung hergeleitet wurde. Im Kapitel 2 wird dieses Ergebnis bestätigt und zugleich verallgemeinert werden für nicht-abelsche Ladungen, die vektoriell zu addieren sind. Der bis Glg.(1.4).

beschrittene Weg, die kanonische Zustandssumme zu einer festen $U(1)$ -Quantenzahl zu berechnen, wurde schon früh im Zusammenhang mit der statistischen Beschreibung der Teilchenproduktion in der hochenergetischen Nukleon-Nukleon-Streuung gefunden [4].

Um das vorliegende System zu konkretisieren, sei angenommen, daß das Gas aus zwei Sorten von Hadronen besteht mit der Baryonenzahl $\alpha=1$, und zwar Nukleonen mit der Seltsamkeit $S=0$ und Hyperonen mit $S=1$. Betrachtet werde nun "aufgeheizte Kernmaterie" mit gegebener Baryonenzahl A und Seltsamkeit S ; andere Wechselwirkungen als die Erzeugung und Vernichtung dieser Teilchen werden vernachlässigt. Man kann jetzt analog zu Glg.(1.3) die kanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}_{A,S}(T,V)$ für den Fall hinschreiben, daß zwei additive Quantenzahlen unabhängig voneinander zu erhalten sind:

$$(1.5) \quad \mathcal{Z}_{A,S}(T,V) = \sum_{\{n_k, \bar{n}_k\}} \delta(A - \sum_k (n_k - \bar{n}_k)) \delta(S - \sum_k (n_k - \bar{n}_k)) \cdot e^{-\beta \sum_k (\epsilon_k^{Nukl} (n_k + \bar{n}_k) + \epsilon_k^{Hyp} (n_k + \bar{n}_k))}$$

Nach Umschreibung der Kronecker- δ -Funktionen in Integrale wie in Glg.(1.4) findet man ($\sigma=+1$):

$$(1.6) \quad \mathcal{Z}_{A,S}(T,V) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} e^{-iA\varphi} e^{-iS\psi} \tilde{\mathcal{Z}}(T,V;\varphi,\psi) \quad ,$$

mit $\tilde{\mathcal{Z}}(T,V;\varphi,\psi) \equiv \tilde{\mathcal{Z}}_{Nukl}(T,V;\varphi) \tilde{\mathcal{Z}}_{Hyp}(T,V;\varphi,\psi) \quad ,$

und $\tilde{\mathcal{Z}}_{Nukl}(T,V;\varphi) \equiv \exp \sum_k \left[\ln(1 + e^{-\beta \epsilon_k^{Nukl} + i\varphi}) + c.c. \right] \quad ,$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{Hyp}(T,V;\varphi,\psi) \equiv \exp \sum_k \left[\ln(1 + e^{-\beta \epsilon_k^{Hyp} + i(\varphi + \psi)}) + c.c. \right] \quad .$$

Für die Argumente der Exponentialfunktionen bzw. die erzeugenden Funktionen $\tilde{\mathcal{Z}}^{(\sigma)}$ selbst gilt ganz allgemein:

$$(1.7) \quad \tilde{\mathcal{Z}}^{(\sigma)}(T,V;\alpha) \equiv \exp \sigma \sum_k \left[\ln(1 + \sigma e^{-\beta \epsilon_k + i\alpha}) + c.c. \right] = \dots$$

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad \dots &= \exp \sum_K \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-\sigma)^{h+1}}{h} \left[e^{-h(\beta \varepsilon_K - i\alpha)} + \text{c.c.} \right] \\
 &= \exp 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-\sigma)^{h+1}}{h} \cos h\alpha \cdot \mathcal{Z}_1(h\beta, V) \\
 &\cong \exp \left[2 \cos \alpha \cdot \mathcal{Z}_1(\beta, V) \right] ,
 \end{aligned}$$

mit der Einteilchenpartitionsfunktion $\mathcal{Z}_1(\beta, V) \equiv \sum_K e^{-\beta \varepsilon_K}$. Falls die Einteilchenenergieniveaus noch eine d -fache innere Entartung besitzen, muß man $\ln \mathcal{Z}$ ersetzen durch $d \cdot \ln \mathcal{Z}$, da sich ja einerseits die miteinander entarteten Zustände formal als Zustände von d verschiedenen Teilchensorten auffassen lassen, es sich andererseits aber um freie Teilchen mit identischen Eigenschaften handelt; also:

$$(1.8) \quad \exp \ln \mathcal{Z} \Rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}_{(1)} \cdot \tilde{\mathcal{Z}}_{(2)} \cdot \dots \cdot \tilde{\mathcal{Z}}_{(d)} = \exp(d \cdot \ln \mathcal{Z}) .$$

In der letzten Zeile der Glgen.(1.7) ist angedeutet, wie man den Boltzmann-Grenzfall erhält, indem man nämlich nur den von der Statistik der Teilchen unabhängigen ersten Term der Entwicklung der Logarithmusfunktionen mitnimmt. Denn insbesondere ergibt sich für $\alpha \equiv 0$ bzw. unter Vernachlässigung der Ladungserhaltung in diesem Grenzfall:

$$(1.9) \quad \tilde{\mathcal{Z}}(T, V; \alpha \equiv 0) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{Z}_1(\beta, V))^N}{N!} \equiv \mathcal{Z}_{\text{Boltzmann}}(T, V) ,$$

i.e. gerade die Zustandssumme für ein System von (Anti-) Teilchen mit unbeschränkter Teilchenzahl im Falle der Boltzmann-Statistik; der Faktor 2 zählt hierbei die Teilchen-Antiteilchen-Entartung.

Mit Hilfe einer Fourier-Bessel-Entwicklung [5],

$$e^{x \cos \alpha} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} I_h(x) e^{i h \alpha} ,$$

kann das Projektionsintegral in Glg.(1.6) analytisch ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad Z_{A,S}(T,V) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} e^{-iA\varphi - iS\psi} \exp\left[2d_{Nukl} \cos\varphi \cdot Z_{1,1}^{Nukl}(\beta,V)\right] \\
 &\quad \cdot \exp\left[2d_{Hyp} \cos(\varphi+\psi) \cdot Z_{1,1}^{Hyp}(\beta,V)\right] \\
 &= \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} i_k(2d_{Nukl} Z_{1,1}^{Nukl}) i_l(2d_{Hyp} Z_{1,1}^{Hyp}) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} e^{-i(A\varphi + S\psi + k\varphi + l(\varphi+\psi))} \\
 &= i_{A-S}(2d_{Nukl} Z_{1,1}^{Nukl}) \cdot i_S(2d_{Hyp} Z_{1,1}^{Hyp}) ,
 \end{aligned}$$

wobei die Entartungsfaktoren d_{Nukl}, d_{Hyp} der jeweiligen Einteilchenenergieniveaus explizit hingeschrieben sind - z.B.: $d_{Nukl} = (2S+1)(2I+1) = 4$ (siehe Bemerkung vor Glg.(1.8)).

Es zeigt sich, daß bereits die exakte Erhaltung der Seltsamkeit alleine einen wesentlichen Einfluß auf die Beschreibung der Paarproduktion (K^+K^- etc.) und assoziierten Produktion (ΛK^+ etc.) in hochenergetischen hadronischen Reaktionen nimmt [6,7]. Und zwar findet man eine starke Abhängigkeit der Anzahl der produzierten seltsamen Paare vom angenommenen Reaktionsvolumen - entsprechend dem experimentell zugänglichen Bereich von Proton-Antiproton-Stößen bis zu tief-inelastischen Schwerionenkollisionen. Dieser Effekt läßt sich anhand des in Glg.(1.5) definierten Modells "aufgeheizter Kernmaterie" erklären.

Untersucht werde der Einfluß des Reaktionsvolumens auf die Strangeness-Produktion in einer hadronischen Reaktion von eingangs A Hadronen. Falls die (Gesamt-)Strangeness verschwindet, müssen im Ausgangskanal der Reaktion gleichviele Hyperonen wie Antihyperonen vorhanden sein; daher ergibt sich die mittlere Anzahl von Strangeness tragenden Paaren dann aus:

$$\langle N_{sp} \rangle = \frac{1}{2} \langle N_H + N_{\bar{H}} \rangle .$$

Im allgemeineren Fall nicht-verschwindender Strangeness ($S \neq 0$), falls also eine der Netto-Strangeness entsprechende Anzahl $|S|$ von Hyperonen oder Antihyperonen bereits im

Eingangskanal der Reaktion vorlag, gilt:

$$(1.11) \quad \langle N_H + N_{\bar{H}} \rangle = 2 \langle N_{Sp} \rangle + |S|$$

Den thermischen Mittelwert berechnet man wie gewohnt:

$$\begin{aligned} \langle N_H + N_{\bar{H}} \rangle &= \frac{\text{Tr}_{A,S} (N_H + N_{\bar{H}}) e^{-\beta(\hat{H}_0^{N_{Mek}} + \hat{H}_0^{H_{Hy}})}}{\text{Tr}_{A,S} e^{-\beta(\hat{H}_0^{N_{Mek}} + \hat{H}_0^{H_{Hy}})}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \ln \text{Tr}_{A,S} e^{-\beta(\hat{H}_0^{N_{Mek}} + \hat{H}_0^{H_{Hy}}) + \lambda(N_H + N_{\bar{H}})} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \ln \mathcal{Z}_{A,S}(T, V; \lambda) \quad , \end{aligned}$$

mit dem Anzahloperator $(N_H) N_{\bar{H}}$ für die (Anti-)Hyperonen. Analog zu den Glgen. (1.5, 6) findet man:

$$(1.12) \quad \mathcal{Z}_{A,S}(T, V; \lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} e^{-i\lambda\varphi - iS\psi} \tilde{\mathcal{Z}}_{N_{Mek}}(T, V; \varphi) \tilde{\mathcal{Z}}_{H_{Hy}}(T, V; \varphi, \psi; \lambda) \quad ,$$

mit
$$\tilde{\mathcal{Z}}_{H_{Hy}}(T, V; \varphi, \psi; \lambda) = \exp \left(2d_{H_{Hy}} \cos(\varphi + \psi) e^{\lambda} \mathcal{Z}_{\gamma}^{H_{Hy}}(\beta, V) \right) \quad ,$$

in der Boltzmann-Näherung. Weiter folgt mit Glg. (1.10):

$$(1.13) \quad \mathcal{Z}_{A,S}(T, V; \lambda) = \bar{\mathcal{I}}_{A-S} \left(2d_{N_{Mek}} \mathcal{Z}_{\gamma}^{N_{Mek}}(\beta, V) \right) \cdot \bar{\mathcal{I}}_S \left(2d_{H_{Hy}} e^{\lambda} \mathcal{Z}_{\gamma}^{H_{Hy}}(\beta, V) \right) \quad ,$$

und damit schließlich, gemäß Glgen. (1.11-13):

$$\begin{aligned} (1.14) \quad \langle N_{Sp} \rangle &= -\frac{1}{2}|S| + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \ln \bar{\mathcal{I}}_S \left(2d_{H_{Hy}} e^{\lambda} \mathcal{Z}_{\gamma}^{H_{Hy}} \right) \\ &= -\frac{1}{2}|S| + \frac{\bar{\mathcal{I}}_S' \left(2d_{H_{Hy}} \mathcal{Z}_{\gamma}^{H_{Hy}} \right)}{\bar{\mathcal{I}}_S \left(2d_{H_{Hy}} \mathcal{Z}_{\gamma}^{H_{Hy}} \right)} \cdot d_{H_{Hy}} \mathcal{Z}_{\gamma}^{H_{Hy}} \quad . \end{aligned}$$

Das Resultat ist also unabhängig von der in der Reaktion erhaltenen Baryonenzahl A , aber man findet gegenüber einer naiven Rechnung ohne Berücksichtigung der Strangeness-

-Erhaltung einen S -, temperatur- und volumenabhängigen "Quenching-Faktor",

$$(1.15) \quad \eta_S \equiv \frac{I'_S(2d_{\text{Hydr}} Z_1^{\text{Hydr}}(\beta, V))}{I_S(2d_{\text{Hydr}} Z_1^{\text{Hydr}}(\beta, V))} .$$

Das Ergebnis einer Rechnung ohne Berücksichtigung der Strangeness-Erhaltung folgt aus Glg.(1.12), wenn man im Integranden $\psi \equiv \sigma$ setzt (vgl. Glg.(1.9)); man bekommt dann anstelle von Glg.(1.15) $\eta_S \equiv 1$.

Allgemein gilt im Kontinuumsrenzfall bezüglich der Einteilchenenergieniveaus:

$$(1.16) \quad Z_1(\beta, V) \equiv \sum_k e^{-\beta \epsilon_k} \\ \longrightarrow \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-\beta \epsilon(p)} \equiv VT^3 \cdot f(T) .$$

Damit läßt sich das Verhalten des Quenching-Faktors für die Grenzfälle kleinen und großen Volumens gleich angeben, wenn man die folgenden Eigenschaften der Bessel-Funktionen verwendet [9]:

$$I'_S(x) = I_{S-1}(x) - \frac{S}{x} I_S(x) ;$$

$$I_S(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) , \text{ für } x \rightarrow \infty ;$$

$$I_{S(0)}(x) \sim \left(\frac{1}{2}x\right)^S / \Gamma(S+1) , \text{ für } x \rightarrow 0 .$$

Man findet daher:

$$(1.17) \quad \eta_S(V \rightarrow \infty) = 1 - O\left(\frac{1}{V}\right) ;$$

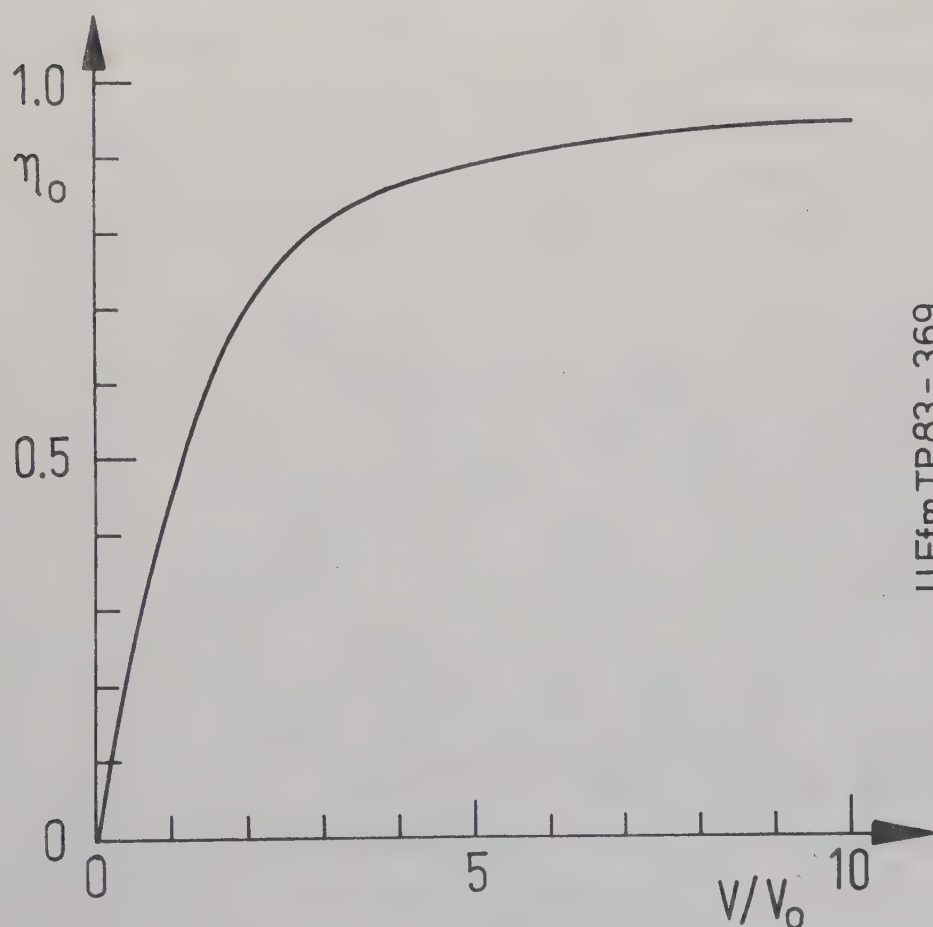
$$\eta_S(V \rightarrow 0) \sim \frac{S}{V} .$$

wobei für $V \rightarrow 0$ der Kontinuumsrimes, Glg.(1.16), allerdings streng genommen ungültig wird.

Die Unterdrückung der Paarproduktion von Hyperonen im Falle einer Reaktion mit $S=\sigma$ läßt sich aus Fig.1 ersehen, wo der Quenching-Faktor η_σ als Funktion des Reaktionsvolumens dargestellt ist; der temperaturabhängige Skalierungsfaktor V_σ besteht in dem volumenunabhängigen Anteil des Arguments der Bessel-Funktionen in Glg.(1.15), denn die Volumenabhängigkeit kann gem. Glg.(1.16) herausgezogen werden:

$$(1.18) \quad V_\sigma^{-1} \equiv 2a_{\text{hyp}} T^3 f_{\text{hyp}}(T) .$$

Man erkennt aus Fig.1, in welcher Abhängigkeit von den thermodynamischen Zustandsvariablen die exakte Erhaltung einer einfach additiven Ladung - entsprechend einer inneren U(1)-Symmetrie - die statistisch beschriebenen Eigenschaften eines Vielteilchensystems beeinflusst.



UFfm TP83 - 369

Fig.1 Der Quenching-Faktor η_σ , Glg.(1.15), als Funktion des Reaktionsvolumens V (V_σ gemäß Glg.(1.18))

Selbstverständlich läßt sich aus der Zustandssumme $\mathcal{Z}_{A,S}$, Glg.(1.10), die Zustandsgleichung der hier betrachteten "Kernmaterie" gewinnen. Vor allem aber läßt sich dieses Modell realistischer gestalten, indem man

- weitere Freiheitsgrade des physikalischen Systems in Form von bisher nicht berücksichtigten Teilchensorten zuläßt - insbesondere scheint die Einbeziehung von Mesonen vordringlich, um die globale Energieerhaltung in einem Stoßprozeß zu erfassen - ,
- das Reaktionsvolumen genauer definiert, da die Hadronen ein nicht zu vernachlässigendes Eigenvolumen besitzen (vgl. die Behandlung eines Gases von Quark-Glue-Plasma-tröpfchen in Kapitel 4) .

Solche und verwandte Fragen wurden zum Teil bereits ausführlich untersucht in den Arbeiten [7,8].

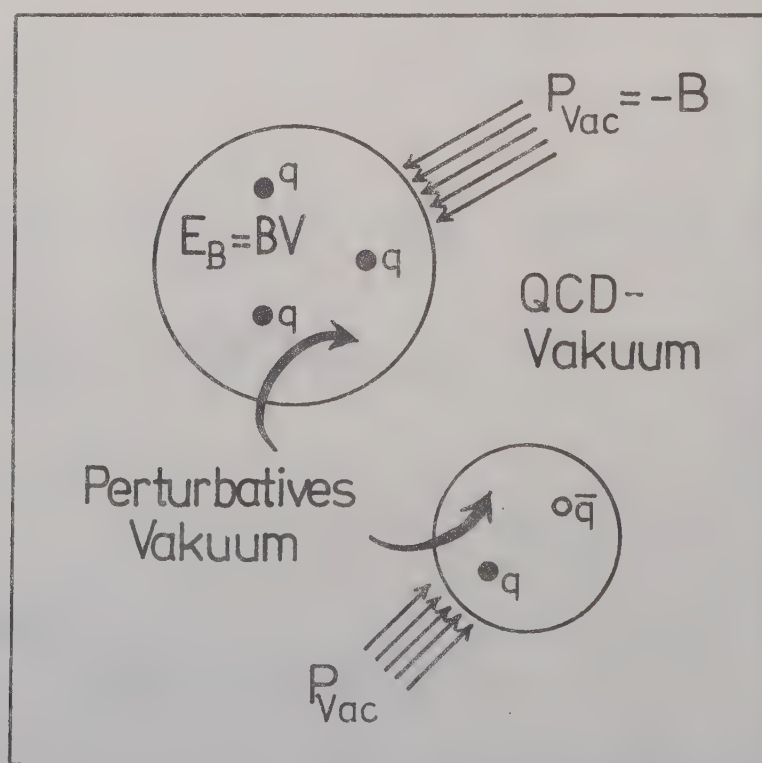


Fig.2 Baryon (qqq) und Meson ($q\bar{q}$) im Bag-Modell (Kap.1.2)

1.2 Ein vereinfachtes Modell des Quark-Glue-Plasmas

Im Vorgriff auf eine korrekte Behandlung der vollständigen $SU_c(3)$ -Symmetrie wird in diesem Abschnitt ein grob vereinfachtes Modell des Quark-Glue-Plasmas vorgestellt. Es geht von den folgenden Annahmen aus, die von der QCD her bzw. durch experimentelle Befunde motiviert sind [10]:

1. Asymptotisch - i.e. bei hohen Temperaturen und/oder Dichten bzw. großen Impulsüberträgen aneinander streuender Quarks oder Gluonen - verhalten sie sich wie freie Teilchen.
2. Das Vakuum der QCD ist ein komplizierter Vielteilchenzustand ("Kondensat"), der die Propagation von Farbladungen unterdrückt. Bei $T=0$ und einer Baryonenzahldichte ($\rho_B \approx \rho_0 = .17 \text{ fm}^{-3}$), wie sie in schweren Kernen vorliegt, finden sich daher Quarks und ggf. auch Gluonen innerhalb endlicher Raumbereiche ($R \approx 1 \text{ fm}$) zu "farblosen" Zuständen gebunden, den beobachteten Hadronen; dieses Phänomen wird als Confinement bezeichnet.

Zu Punkt 2. ist anzumerken, daß der experimentell gefundene EMC-Effekt [11] - bei der Streuung von Leptonen an Hadronen bzw. Quarks in (bisher) leichten Kernen mißt man eine charakteristische Abweichung von der Impulsverteilung der Quarks in freien Nukleonen - möglicherweise darauf hinweist, daß bereits in den untersuchten Kernen die Quarks nicht mehr fest in einzelnen Hadronen gebunden vorkommen. Vielmehr scheinen sie mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit über den gesamten Kern delokalisiert zu sein, vergleichbar der Erscheinung eines elektronischen Leitungsbandes in einem Kristall (eine neuere Referenz mit Hinweisen auf bisherige experimentelle Befunde und theoretische Arbeiten zu diesem Thema ist [12]).

Unter Vernachlässigung einer coulombartigen Restwechselwirkung kann das Confinement phänomenologisch wie im M.I.T.-Bag-Modell [13] durch eine Energiedichte, $\frac{\epsilon_B}{V} = B$,

des sogenannten perturbativen Vakuums beschrieben werden; sie wirkt wie ein äußerer Druck, $P_{vac} = -\mathcal{B}$, vonseiten des des QCD-Vakuums auf von daher räumlich begrenzte Bereiche ("Blasen"), als die die hadronische Phase der Materie vor-gefunden wird (Fig.2). Für eine konsistente Beschreibung des hadronischen Massenspektrums muß der Wert des Parameters $\mathcal{B}$ ungefähr in dem folgenden Bereich liegen [14,15]:

$$145 \text{ MeV} \leq \mathcal{B}^{1/4} \leq 235 \text{ MeV}.$$

Weiterhin impliziert die Confinement-Hypothese die Kopplung der Farbladungen zu einem Singlett ("farbloser" Zustand mit der Quantenzahl des Vakuums) bezüglich der zugrundegelegten Symmetriegruppe über das Gesamtvolumen eines solchen hadronischen Bags.

Die QCD ist analog der Quantenelektrodynamik eine Eichtheorie, wobei jedoch die nicht-abelsche $SU_c(3)$ -Gruppe an die Stelle der $U(1)$ -Gruppe als innerer Symmetriegruppe tritt. Ohne im Detail auf die kompliziertere Struktur der $SU_c(3)$ Rücksicht zu nehmen, soll jetzt ein einfaches Modell des Quark-Glue-Plasmas entwickelt werden, das in groben Zügen Übereinstimmung mit von der QCD her zu erwartenden Eigenschaften der Plasmaphase aufweist. -

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Vorstellung, daß bei hohen Dichten bzw. Temperaturen die hadronischen Bags (siehe Fig.2) einander berühren, überlappen und schließlich zu immer größeren Bags verschmelzen können - bis u.U. ein einziger makroskopischer Bag ein gegebenes äußeres Volumen vollständig ausfüllt. Da bei endlichen Temperaturen innere Anregungen der Bags in Form von zusätzlichen Quark-Antiquark-Paaren und thermischen Gluonen auftreten, wird ein solches Gebilde hier als Tröpfchen bestimmter Größe und Temperatur beschrieben, das dem Vakuumdruck ausgesetzt und mit einem näherungsweise idealen Quark-Glue-Plasma gefüllt ist.

Der Tatsache, daß alle bekannten Hadronen drei Quarks bzw. ein Quark-Antiquark-Paar enthalten und man entsprechend kompliziertere ("exotische") farblose Multiquarkzustände

oder Zustände erwartet, die eine gewisse Anzahl von Gluonen enthalten, kann man in naiver Weise in einem statistischen Modell Rechnung tragen, indem man (orientiert an der $SU_c(3)$) drei Quarks die folgenden Diagonalmatrizen q_i zuordnet:

$$(1.19) \quad q_1 \equiv \text{diag}(1, e^{\frac{2\pi i}{3}n}, e^{\frac{4\pi i}{3}n}), \quad q_2 \equiv \text{diag}(e^{\frac{4\pi i}{3}n}, 1, e^{\frac{2\pi i}{3}n}),$$

$$q_3 \equiv \text{diag}(e^{\frac{2\pi i}{3}n}, e^{\frac{4\pi i}{3}n}, 1),$$

wobei n die Werte $1, 2, 3$ annehmen kann. Außerdem seien zu drei Antiquarks die Matrizen $\bar{q}_i$ definiert:

$$(1.20) \quad \bar{q}_i \equiv q_i^* \quad , \quad i=1,2,3 \quad .$$

Mit der Abkürzung,

$$(1.21) \quad \mathcal{F}(M) \equiv \frac{1}{3} \det^{1/3} \sum_{n=1}^3 M(n) \quad ,$$

in der M eine n -abhängige 3×3 -Matrix bezeichnet, gilt:

$$(1.22a) \quad \mathcal{F}(q_i) = \mathcal{F}(q_i q_j) = \mathcal{F}(q_i \bar{q}_{j \neq i})$$

$$= \mathcal{F}(q_i^2 q_{j \neq i}) = \mathcal{F}(q_i^2 \bar{q}_j) = 0 \quad ,$$

$$(1.22b) \quad \mathcal{F}(q_i \bar{q}_i) = \mathcal{F}(q_1 q_2 q_3) = \mathcal{F}(q_i^3) = 1 \quad ,$$

und desgleichen für die Terme mit den komplex konjugierten Argumenten zu denen in Glgen.(1.22). Da es sich um Diagonalmatrizen handelt, ist die Multiplikation kommutativ, und man kann jeden Vielteilchenzustand aus Quarks oder Antiquarks bzw. das Produkt der dazugehörigen Matrizen so ordnen, daß es die Gestalt annimmt:

$$(1.23) \quad \mathcal{T}(\underline{L}_1, \underline{L}_2, \underline{L}_3, \underline{\bar{L}}_1, \underline{\bar{L}}_2, \underline{\bar{L}}_3) \equiv q_1^{\underline{L}_1} q_2^{\underline{L}_2} \dots \bar{q}_3^{\underline{\bar{L}}_3} \quad ,$$

mit $\underline{L}_i, \underline{\bar{L}}_j \geq 0$ und $\mathcal{T}(0, \dots, 0) \equiv 1$.

Mit Hilfe der Operation $\overline{}$, Glg.(1.21), lassen sich dann wegen der Glgen.(1.22) "farbige" von "farblosen" Vielteilchenzuständen unterscheiden und trennen, denn:

$$(1.24) \text{ ("farblos")} \quad \overline{\overline{\pi}}(\pi) = 1 \iff$$

$$\pi = \pi(3u_1 + l + u_1, 3u_2 + l + u_2, 3u_3 + l + u_3, \\ 3\overline{u}_1 + l + u_1, 3\overline{u}_2 + l + u_2, 3\overline{u}_3 + l + u_3)$$

und: ("farbig")

$$\overline{\overline{\pi}}(\pi) = 0, \text{ sonst.}$$

Die farblosen Zustände sind also gerade diejenigen, die Vielfachen derjenigen Kombinationen von Quark- oder Anti-quarkmatrizen entsprechen, die in den Glgen.(1.22b) als Argumente auftauchen, d.h. Vielfache von wohlbestimmten 3-(Anti-)Quark- oder Quark-Antiquark-Zuständen.

In Analogie zur QCD sollten auch acht farbige Gluonen vorhanden sein, deren Matrizen sich hier dadurch ergeben, daß man sie Quark-Antiquark-Paaren entsprechend definiert - im Falle der $SU_c(3)$ läßt sich die Oktettdarstellung für die Gluonen als Produkt der Triplet- und Antitriplettdarstellung von Quarks und Antiquarks erzeugen (s.Kap.3.1):

$$(1.25a) \quad g_1 \equiv q_1 \overline{q}_2, \quad g_2 \equiv q_1 \overline{q}_3, \quad g_3 \equiv q_2 \overline{q}_3,$$

$$g_5 \equiv \overline{q}_1 q_2, \quad g_6 \equiv \overline{q}_1 q_3, \quad g_7 \equiv \overline{q}_2 q_3;$$

das sind alle farbigen Kombinationen im Sinne von (1.24), die in Frage kommen. Um acht Gluonen zu erhalten, denn zumindest die Anzahl der grundsätzlich vorhandenen Freiheitsgrade sollte stimmen, muß man also noch irgend zwei farblose Kombinationen oder Linearkombinationen von solchen hinzunehmen:

$$(1.25b) \quad g_4 \equiv q_1 \overline{q}_1, \quad g_8 \equiv q_2 \overline{q}_2;$$

wie im Kapitel 3 gezeigt wird, findet man ähnlich für die $SU_c(3)$ -Symmetrie ebenfalls zwei Gluonen, die zwar zur Oktettdarstellung gehören, deren Color-Isospin- und -Hyperladungskomponenten aber verschwinden.

Jetzt läßt sich wiederum wie im vorigen Abschnitt eine generierende Funktion angeben, aus der man durch die Operation $\mathcal{F}$, Glg.(1.21), denjenigen Anteil herausprojizieren kann, der die Zustandssumme eines Quark-Glue-Plasmas darstellt, das nur insgesamt farblose Zustände besitzt. Die generierende (Matrix-)Funktion $\tilde{\mathcal{Z}}(T, V; n)$ ist im wesentlichen gleich der Zustandssumme freier Quarks und Gluonen, wobei jedoch die einem Teilchen entsprechenden Boltzmann-Faktoren $e^{-\beta \epsilon}$ mit der zugehörigen Matrix für dieses Teilchen multipliziert werden gemäß den Glgen.(1.19, 20, 25) - man vergleiche auch mit den Glgen.(1.4, 7):

$$(1.26) \quad \tilde{\mathcal{Z}}(T, V; n) \equiv \prod_{i=1}^3 \exp d_{\text{quark } i} \sum_K \left(\ln(1 + g_i e^{-\beta \epsilon_K}) + c.c. \right) \\ \cdot \prod_{j=1}^4 \exp d_{\text{glue } j} \sum_K \left(-\ln(1 - g_j e^{-\beta \epsilon_K}) + c.c. \right);$$

dabei wurde verwendet, daß $g_{5,6,7,8} = g_{1,2,3,4}^*$. Die Entartungsfaktoren sind $d_{\text{glue}} = 2$, da die masselosen Gluonen wie Photonen links- oder rechtspolarisiert sein können, und $d_{\text{quark}} = (2i+1)(2s+1) = 4$; es wird lediglich das Isospinduplett der leichten u,d-Quarks mitgezählt.

Massen der u,d-Quarks sind von der Größenordnung 10MeV, für das nächstschwerere s-Quark nimmt man ca. 250MeV an und das c-Quark ist noch um rund 1GeV schwerer, wie aus der Quarkonium-Spektroskopie geschlossen wird [15]. Andere als die leichten Quarks werden im Folgenden nicht berücksichtigt, da der Einfluß schwererer Teilchen generell durch einen Boltzmann-Faktor, $e^{-\Delta m/T}$, zu der Massendifferenz Δm gegenüber leichteren unterdrückt wird. - Bei Temperaturen in der Größenordnung 150-250MeV werden die u, d-Quarks als masselose Teilchen behandelt; i.A. lassen sich aber Teilchen beliebiger Masse m durch die richtige Energie-Impuls-Relation einbeziehen:

$$(1.27) \quad \epsilon_K = (K^2 + m^2)^{1/2}.$$

Zur Berechnung der generierenden Funktion $\tilde{\mathcal{Z}}$, Glg.(1.26),

sei zunächst bemerkt, daß die Logarithmusfunktionen im Exponenten Diagonalmatrizen im Argument enthalten und daher selbst Diagonalmatrizen sind mit den Logarithmen der Diagonalmatrixelemente als Eintrag (vgl. u. nach Glg.(1.31)):

$$\begin{aligned}
 (1.28) \quad & \sum_{i=1}^3 \sum_K \left(\ln(1 + g_i e^{-\beta \epsilon_K}) + c.c. \right) \\
 &= \text{diag} \left\{ \sum_K \left(\ln(1 + e^{-\beta \epsilon_K}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln(1 + e^{-\beta \epsilon_K + \frac{2\pi i}{3}}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln(1 + e^{-\beta \epsilon_K + \frac{4\pi i}{3}}) + c.c. \right) \right\}, \\
 & - \sum_{j=1}^4 \sum_K \left(\ln(1 - g_j e^{-\beta \epsilon'_K}) + c.c. \right) \\
 &= \text{diag} \left\{ - \sum_K \left(\ln(1 - e^{-\beta \epsilon'_K}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln(1 - e^{-\beta \epsilon'_K - \frac{2\pi i}{3}}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln(1 - e^{-\beta \epsilon'_K - \frac{4\pi i}{3}}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln(1 - e^{-\beta \epsilon'_K + \frac{2\pi i}{3}}) + c.c. \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Summen über Einteilchenimpulszustände K lassen sich im Kontinuumsfall (siehe Glg.(1.16)) für masselose Quarks und Gluonen wegen Glg.(1.27),

$$(1.29) \quad \epsilon_K^{(\text{Quark})} = \epsilon_K^{(\text{Gluon})} = K,$$

als Phasenraumintegrationen analytisch ausführen [16]:

$$\begin{aligned}
 (1.30) \quad & \sigma \sum_K \left(\ln(1 + \sigma e^{-\beta K + i\alpha}) + c.c. \right) \\
 &= \sigma \frac{\pi^2}{12} V T^3 \left(\frac{7}{30} - \left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\sigma}{15} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\sigma}{15} \right)^4 \right),
 \end{aligned}$$

mit dem Periodizitätsbereich:

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi \quad (\sigma = +1), \quad \sigma \leq \alpha \leq 2\pi \quad (\sigma = -1);$$

die Kronecker- δ -Funktionen bzw. $\sigma = \pm 1$ stehen für die Fermi-Dirac- bzw. Bose-Einstein-Statistik der Quarks und Gluonen; dieses wichtige Resultat, Glg.(1.30), und eine Verallgemeinerung für endliche chemische Potentiale der Quarks wird in Kapitel 3.2 ausführlich hergeleitet.

Unter Verwendung von Glg.(1.30) ergibt sich durch Einsetzen von Glg.(1.28) die generierende Funktion, Glg.(1.26):

$$(1.31) \quad \tilde{Z}(T, V; \mu) = \text{diag} \left\{ \exp \frac{\pi^2}{12} V T^3 \cdot \left(d_{\text{Quark}} \left[3 \cdot \frac{7}{30} - (1-\sigma) \frac{56}{3 \ln 81} \right] + d_{\text{Gluon}} \left[4 \cdot \frac{8}{30} - (1-\sigma) \frac{32}{3 \ln 27} \right] \right) \right\},$$

wobei benutzt wurde, daß die Exponentialfunktion einer Diagonalmatrix eine Diagonalmatrix mit den exponentierten Diagonalmatrixelementen als Eintrag ist; allgemein gilt:

$$f(\text{diag}\{a_{ii}\}) = \text{diag}\{f(a_{ii})\},$$

sofern f etwa in eine Taylor-Reihe entwickelbar ist.

(Bemerkung: das Ergebnis in Glg.(1.31) erhält man nach Zwischenrechnungen folgender Art:

- z.B. Quarks ($\sigma = +1$), $n=2$, s.Glgen.(1.28,30) -

$$\sum_k \left[\ln(1 + e^{-\beta k}) + \ln(1 + e^{-\beta k + \frac{4\pi i}{3}}) + \ln(1 + e^{-\beta k + \frac{8\pi i}{3}}) + \text{c.c.} \right]$$

$$\stackrel{(1.29,30)}{=} \frac{\pi^2}{12} V T^3 \left(\frac{7}{30} + \frac{7}{30} - \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - 2\right)^4 + \frac{7}{30} - \left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 2\right)^4 \right)$$

Periodizitäts-
bereich
beachten!

$$= \frac{\pi^2}{12} V T^3 \left(3 \cdot \frac{7}{30} - \frac{56}{81} \right)$$

, q.e.d.).

Durch Anwendung der Operation $\mathcal{F}$, Glg.(1.21), auf $\tilde{Z}(T, V; \omega)$ erhält man schließlich die gesuchte Zustandssumme $Z_0(T, V)$ für ein Quark-Glue-Plasma mit der einschränkenden Bedingung, daß der zugrundegelegte Vielteilchenzustandsraum nur farblose Zustände nach Glg.(1.24) enthält:

$$\begin{aligned}
 (1.32) \quad Z_0(T, V) &\equiv \mathcal{F}(\tilde{Z}(\omega)) = \frac{1}{3} \det^{1/3} \sum_{\omega=1}^3 \tilde{Z}(T, V; \omega) \\
 &= \frac{1}{3} \det^{1/3} \text{diag} \left\{ Z_{SB} + 2 \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left(d_{\text{Quark}} \left(3 \cdot \frac{7}{30} - \frac{56}{81} \right) + d_{\text{Glue}} \left(4 \cdot \frac{8}{30} - \frac{32}{27} \right) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{3} Z_{SB} \left(1 + 2 \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left(d_{\text{Quark}} \left(-\frac{56}{81} \right) + d_{\text{Glue}} \left(-\frac{32}{27} \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

In Glg.(1.32) wurde die Zustandssumme für ein Strahlungsplasma ohne Einschränkung mit $2 \cdot 3 \cdot d_{\text{Quark}}$ verschiedenen Fermionen bzw. Antifermionen und $8 \cdot d_{\text{Glue}}$ Bosonen (Stefan-Boltzmann-Grenzfall, SB) herausgezogen,

$$(1.33) \quad Z_{SB}(T, V) \equiv \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left(2 \cdot 3 \cdot d_{\text{Quark}} \cdot \frac{7}{60} + 8 \cdot d_{\text{Glue}} \cdot \frac{8}{60} \right),$$

so daß die durch die Beschränkung auf farblose Zustände bedingte Abweichung vom SB-Grenzfall deutlich wird. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß die Projektion auf die gewünschten Zustände hier im Unterschied zu den Beispielen in Kapitel 1.1, wo sie durch Integrationen bewirkt wurde, durch Anwendung der "per Hand" konstruierten Operation $\mathcal{F}$ erreicht wird.

Um das soweit entwickelte Modell hinsichtlich der eingangs dargelegten phänomenologischen Annahmen zu vervollständigen, müßte man in Glg.(1.32) einen dem Vakuumdruck entsprechenden Boltzmann-Faktor,

$$(1.34a) \quad Z_{\text{VAC}}(T, V) \equiv e^{-\beta B V},$$

hinzufügen, denn: (1.34b) $P_{\text{VAC}} \equiv T \partial_V \ln Z_{\text{VAC}}(T, V) = -B$;

der Druck erscheint negativ, da er ja dem Strahlungsdruck

des Quark-Glue-Plasmas im Innern im Sinne des Bag-Modells entgegenwirken soll. Die thermodynamischen Eigenschaften von Quark-Glue-Plasmatröpfchen werden im Kapitel 4 untersucht.

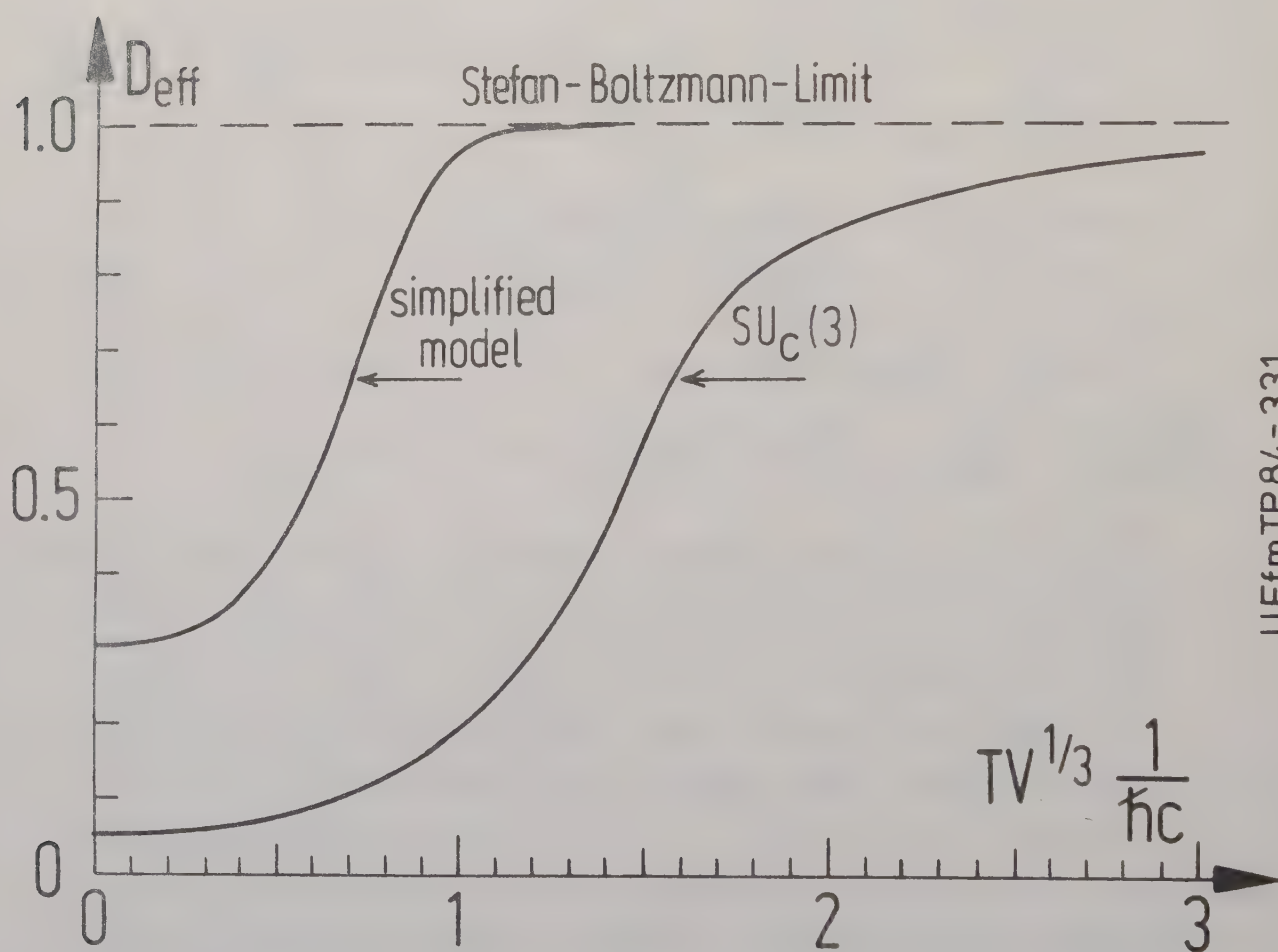
Abschließend und zugleich als Ausblick soll die Abweichung vom SB-Grenzfall für die Energiedichte $\mathcal{E}$ im vorliegenden Modell berechnet werden; mit den Glgen.(1.32,33) gilt:

$$\begin{aligned}
 (1.35) \quad \mathcal{E} &\equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}_0(T, V) \\
 &= \mathcal{E}_{SB} - 3 \frac{\pi^2}{12} T^4 \left(d_{\text{Quark}} \frac{56}{81} + d_{\text{Glue}} \frac{32}{27} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \exp \frac{\pi^2}{12} V T^3 \left(d_{\text{Quark}} \frac{56}{81} + d_{\text{Glue}} \frac{32}{27} \right) \right]^{-1} \\
 &= \mathcal{E}_{SB} \left\{ 1 - \frac{d_{\text{Quark}} \frac{56}{81} + d_{\text{Glue}} \frac{32}{27}}{2.3 \cdot d_{\text{Quark}} \frac{7}{54} + 8 \cdot d_{\text{Glue}} \frac{8}{60}} \left[\dots \right]^{-1} \right\} \\
 &\equiv \mathcal{E}_{SB} \cdot D_{\text{eff}}(TV^{1/3}) \quad ,
 \end{aligned}$$

mit: $\mathcal{E}_{SB} = \frac{3T}{V} \ln \mathcal{Z}_{SB} \quad .$

Der Korrekturfaktor D_{eff} entspricht qualitativ dem in Kapitel 1.1 diskutierten Quenching-Faktor η_s , Glg.(1.15), und wird in Kapitel 3.2 als "effektive Entartung" der Einteilchenenergieniveaus interpretiert werden. - In Fig.3 ist D_{eff} als Funktion von $TV^{1/3}$ aufgetragen, der "thermischen Größe" des Systems. Zum Vergleich ist auch ein analoges Resultat für die $SU_c(3)$ -Gruppe vorweggenommen. Man sieht einerseits, daß die Einschränkung auf $SU_c(3)$ -Singlettzustände eine erheblich stärkere Abweichung vom SB-Grenzfall hervorruft als die in dem hier betrachteten, vereinfachten Modell geforderte Beschränkung auf farblose Zustände gemäß Glg.(1.24). Auffällig ist andererseits aber die wesentlich stärkere, weil nach Glg.(1.35) exponentielle, Annäherung von D_{eff} an den asymptotischen Wert für das freie (Strahlungs-)Plasma, $D_{\text{eff}} = 1$, bei $TV^{1/3} \approx 1.1$. In beiden Fällen verhält sich das Quark-Glue-Plasma im Grenzfall sehr großen Volumens bzw. auch bei entsprechend hohen Temperaturen wie das uneingeschränkte System, d.h. dann

wenn im Mittel eine große Zahl von Teilchen der Beschränkung auf bestimmte erlaubte Zustände unterworfen wird. Das in Fig.3 dargestellte Resultat bedeutet deshalb, daß im vorliegenden Modell schon bei kleineren Werten von $TV^{1/3}$ und erheblich schneller mit zunehmender mittlerer Teilchenzahl ($E_{SB}V/3T \sim VT^3$, siehe E_{SB} nach Glg.(1.35) und Glg.(1.33)) als im Falle der $SU_C(3)$ -Symmetrie die verbotenen farbigen Zustände nicht mehr ins Gewicht fallen im Vergleich mit den farblosen Zuständen.



UFfmTP84-331

Fig.3 Der Korrekturfaktor D_{eff} , Glg.(1.35), als Funktion von $TV^{1/3}$ (z.Vgl. $SU_C(3)$ -Quark-Glue-Plasma, Kap.4.)

Nachbemerkung:

Ein Vorzug des vereinfachten Modells besteht in dem analytischen Resultat, Glg.(1.32), das ohne weitere Näherungen (z.B. Boltzmann-Statistik oder $TV^{1/3} \gg 1$) erhalten wurde.

2. Die gruppentheoretische Projektionsmethode

In dem folgenden Kapitel 2.1 wird gezeigt, daß und wie sich das in Kapitel 1.1 abgeleitete Projektionsintegral zur Projektion einer quantenstatistischen Zustandssumme auf eine feste $U(1)$ -Quantenzahl für eine beliebige nicht-abelsche $SU(N)$ -Symmetrie verallgemeinern läßt. Daran anschließend wird in Kapitel 2.2 die $SU(2)$ -(Isospin-)Gruppe als einfachstes Beispiel einer nicht-abelschen Symmetrie behandelt und anhand eines Beispiels werden einige Erläuterungen zu einer $U(1) \times SU(N)$ -Symmetrie gegeben.

2.1 Allgemeine Darstellung der Projektionsmethode für die innere Symmetriegruppe $SU(N)$

Einige wesentliche Eigenschaften der $SU(N)$ -Gruppe, die im gegenwärtigen Zusammenhang von Bedeutung sein werden, sind in dem nachstehenden Kasten zusammengestellt [17].

Wichtige Eigenschaften der $SU(N)$ -Gruppe

$SU(N)$, die (Matrizen-)Gruppe der speziellen unitären Transformationen in N Dimensionen.

1. Die Gruppenelemente lassen sich durch $n \equiv N^2 - 1$ reelle Zahlen parametrisieren; n heißt Ordnung der Gruppe. Es gibt daher n Generatoren $\hat{a}_\lambda$, die infinitesimale Transformationen beschreiben und mit den Gruppenelementen $\hat{g} \in SU(N)$ verknüpft sind:

$$\hat{g}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \exp i \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda \hat{a}_\lambda ;$$

es gilt dann:

$$\hat{g} \hat{g}^\dagger = \mathbb{1} \implies \hat{a}_\lambda^\dagger = \hat{a}_\lambda ,$$

d.h. die Generatoren sind (lineare) hermitesche Operatoren und haben daher (additive) reelle Eigenwerte.

2. Es existieren $r \equiv N - 1$ miteinander kommutierende Generatoren; r heißt Rang der Gruppe; diese Generatoren erzeugen die abelsche Cartan-Untergruppe und sollen Ladungsoperatoren $\hat{Q}_\nu$ heißen: $[\hat{Q}_\nu, \hat{Q}_{\nu'}] = 0$.

(Forts.)

(Forts.)

3. Es existieren r nicht-lineare Casimir-Operatoren,

$$\hat{C}_\mu = \sum_{\lambda=1}^N c_{\mu\lambda} (\alpha_\lambda)^{\mu+1}, \quad \mu=1, \dots, r,$$

die mit allen Generatoren vertauschen, $(\hat{\alpha}_\lambda, \hat{C}_\mu) = 0$,
und daher gleichzeitig mit den Ladungsoperatoren
diagonalisiert werden können.

Sei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator des betrachteten Systems;
dann wird eine innere SU(N)-Symmetrie durch folgende Kom-
mutatorrelationen definiert:

$$(2.1) \quad [\hat{H}, \hat{\alpha}_\nu] = [\hat{\alpha}_\nu, \hat{\alpha}_\nu] = [\hat{\alpha}_\nu, \hat{C}_\mu] = [\hat{C}_\mu, \hat{H}] = 0,$$

wobei die $\hat{\alpha}_\nu$ gerade die $N-1$ linearen hermiteschen La-
dungsoperatoren und die $\hat{C}_\mu$ $N-1$ nicht-lineare Casimir-
Operatoren sein sollen. Die innere Symmetrie ist also
charakterisiert durch Kommutatorrelationen im Rahmen der
abelschen Untergruppe der vollen SU(N)-Gruppe plus der In-
varianten. Man erhält insgesamt einen maximalen Satz von
 $2(N-1)+1 = 2N-1$ miteinander kommutierenden - i.e. gleich-
zeitig diagonalisierbaren - Operatoren, deren Eigenwerte
dann die "guten" Quantenzahlen physikalischer Zustände des
Systems beschreiben.

Die Projektionsmethode zielt nun auf die Berechnung der
kanonischen Zustandssumme bezüglich einer vorgegebenen
(irreduziblen) Darstellung der SU(N)-Gruppe:

$$(2.2) \quad Z_{\vec{\alpha}}(T, V) \equiv \frac{\text{Tr}}{\mathcal{Q}} e^{-\beta \hat{H}},$$

$\vec{\alpha}$ bezeichnet den $(N-1)$ -dimensionalen Vektor der SU(N)-
-Hauptquantenzahlen, der von Multipllett zu Multipllett ver-
schieden ist; die Komponenten dieses Vektors können etwa
die Eigenwerte der Casimir-Operatoren sein, die ja gerade
die Multipletts charakterisieren. $\frac{\text{Tr}}{\mathcal{Q}}$ meint die Spurbil-
dung über die Zustände des durch $\vec{\alpha}$ bestimmten Multipletts.
- Die gewählte Bezeichnungsweise und die nachfolgende

abstraktere Entwicklung einer Projektionstechnik wird in dem folgenden Kapitel anhand der $SU(2)$ -Gruppe verdeutlicht werden und in den Kapiteln 3, 4 schließlich auf die innere $SU_c(3)$ -Symmetrie der Quarks und Gluonen angewendet. - Der entscheidende Schritt besteht jetzt in der Betrachtung einer neuen generierenden Funktion $\mathcal{Z}$ [18,19]:

$$(2.3) \quad \mathcal{Z}(T, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \equiv \sum_{\vec{\alpha}} \frac{\mathcal{Z}_{\vec{\alpha}}(T, \alpha)}{\dim(\vec{\alpha})} \cdot \chi_{\vec{\alpha}}(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

wobei über alle Multipletts $\vec{\alpha}$ summiert wird und die kanonischen Zustandssummen $\mathcal{Z}_{\vec{\alpha}}$ mit dem Charakter $\chi_{\vec{\alpha}}$ der betreffenden Darstellung dividiert durch ihre Dimension gewichtet werden. Unter der Dimension $\dim(\vec{\alpha})$ einer Darstellung versteht man die (endliche) Dimension desjenigen Vektorraumes, der von den dazugehörigen Zuständen aufgespannt wird - die Begriffe Darstellung und Multipllett werden synonym gebraucht. Die Charaktere werden hier definiert als darstellungsabhängige und i.A. komplexwertige Funktionen der r reellen Variablen ("Drehwinkel"), durch die die Elemente der Cartan-Untergruppe parametrisiert werden (siehe S.23f):

$$(2.4) \quad \chi_{\vec{\alpha}}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \equiv \text{Tr}_{\vec{\alpha}} \exp i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v \\ = \sum_{n(\vec{\alpha})} \langle n | e^{i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} | n \rangle ;$$

mit $n(\vec{\alpha})$ sind dabei die Zustände des Multipletts $\vec{\alpha}$ bezeichnet; außerdem gilt natürlich:

$$(2.5) \quad \dim(\vec{\alpha}) \equiv \sum_{n(\vec{\alpha})} 1 = \chi_{\vec{\alpha}}(\sigma, \dots, \sigma) .$$

Die so definierten Charaktere der $SU(N)$ -Gruppe genügen einer Orthogonalitätsrelation, die es dann ermöglichen wird, die gesuchte kanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}_{\vec{\alpha}}$ aus $\mathcal{Z}$ herauszuprojizieren:

$$(2.6) \quad \int_{SU(N)} d\alpha_1 \dots d\alpha_r M(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \chi_{\vec{\alpha}}^*(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \chi_{\vec{\beta}}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \delta_{\vec{\alpha}\vec{\beta}} ;$$

dabei ist M eine geeignete Maßfunktion, die für die jeweilige Symmetriegruppe berechnet werden muß, und das Integral wird über den relevanten Parameterbereich der Cartan-Untergruppe geführt.

Die Orthogonalitätsrelation der Charaktere ist als Verallgemeinerung der in Kapitel 1.1 benutzten Integraldarstellung für die Kronecker- δ -Funktion zu betrachten:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-ik\varphi} e^{ik'\varphi} = \delta_{kk'}.$$

Die Berechnung der Charaktere und Maßfunktionen für die Gruppen $SU(2)$ und $SU(3)$ wird in den folgenden Kapiteln explizit vorgeführt; eine allgemeine Theorie der Charaktere bzw. die Ableitung ihrer Eigenschaften wurde von H. Weyl im Rahmen der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen entwickelt [20], worauf hier aber nicht weiter eingegangen wird.

Aus den Glgen. (2.3,6) folgt unmittelbar:

$$(2.7) \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \dim(\mathcal{A}) \int_{SU(N)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n M(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \chi_{\mathcal{A}}^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \tilde{\mathcal{Z}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Die Glgen. (2.2-7) stellen den wesentlichen formalen Zusammenhang der Projektionsmethode dar. Für die Anwendbarkeit entscheidend ist aber die Frage, ob die neue generierende Funktion $\tilde{\mathcal{Z}}$ auch praktisch ausgewertet werden kann. In der Tat wird man gleich sehen, daß die Berechnung der generierenden Funktion im Falle vernachlässigbarer Wechselwirkung auf die Berechnung einer Art Zustandssumme freier Teilchen hinausläuft. Deshalb kann dann die kanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$, Glg. (2.2), durch die Ausführung von Gruppenintegralen erhalten werden, was insbesondere nicht eine - kaum durchführbare - Konstruktion der Multipletts $\mathcal{A}$ aus beliebig komplizierten Vielteilchenzuständen erfordert. Zu diesem Zweck soll jetzt gezeigt werden, daß gilt:

$$(2.8) \quad \tilde{\mathcal{Z}}(\tau, V; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^n \alpha_v \hat{Q}_v} \right),$$

mit einer uneingeschränkten Spurbildung über den gesamten

Hilbert-Raum. Zum Beweis von Glg.(2.8) berechnet man die rechte Seite der Gleichung, indem man die Zustände nach den unitären irreduziblen Darstellungen der $SU(N)$ klassifiziert, die Spur über diese einzelnen Multipletts bildet und anschließend über sämtliche Multipletts summiert, so daß man den gesamten Hilbert-Raum erfaßt:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} \right) &= \sum_{\vec{\alpha}} \text{Tr}_{\vec{\alpha}} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} \right) \\ &= \sum_{\vec{\alpha}} \sum_{n(\vec{\alpha})} \sum_{m(\vec{\alpha})} \langle n, m | e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} | n, m \rangle, \end{aligned}$$

wobei mit $n(\vec{\alpha})$ die Zustände des Multipletts $\vec{\alpha}$ bezeichnet sind und $m(\vec{\alpha})$ weitere mögliche Entartungen der einzelnen Zustände berücksichtigt - im Falle der $SU(2)$ -Gruppe entsprechen sich $\vec{\alpha}$ und der Gesamtspin J und $n(\vec{\alpha})$ und die Komponenten des Spins parallel zur Quantisierungsachse (J_3), und schließlich muß auch dabei noch eine weitere Entartung der Zustände in Betracht gezogen werden ($m(\vec{\alpha})$), da die so klassifizierten Zustände z.B. aus verschiedenen Anzahlen bezüglich ihres Spins unterschiedener Teilchen aufgebaut sein können. - Weiter folgt dann nach Einschieben eines vollständigen Satzes von Zuständen:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} \right) &= \sum_{\vec{\alpha}} \sum_{n, n'} \sum_{m, m'} \langle n, m | e^{-\beta \hat{H}} | n', m' \rangle \\ &\quad \cdot \langle n', m' | e^{i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} | n, m \rangle \\ &= \sum_{\vec{\alpha}} \sum_n \sum_m \langle n, m | e^{-\beta \hat{H}} | n, m \rangle \langle n | e^{i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} | n \rangle; \end{aligned}$$

hier wurde benutzt, daß nach Voraussetzung, Glgen(2.1), der Hamilton-Operator diagonal in einer Darstellung $\vec{\alpha}$ ist, desgleichen die Ladungsoperatoren $\hat{Q}_v$ bezüglich der Zustände m , da sie lediglich auf den Multipletts definiert sind. Da $\hat{H}$ auf alle Zustände $n(\vec{\alpha})$ gleich bzw. gar nicht wirkt, denn es wird ja gerade eine ungebrochene innere Symmetrie untersucht (d.h. es gibt z.B. keine Feinstrukturaufspaltung der Zustände), ergibt sich aus dem zuletzt

erhaltenen Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} \right) \\ &= \sum_{\vec{\alpha}} \sum_{m(\vec{\alpha})} \langle m | e^{-\beta \hat{H}} | m \rangle \sum_{n(\vec{\alpha})} \langle n | e^{i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} | n \rangle. \end{aligned}$$

Die Summe über $n(\vec{\alpha})$ kann nun ausgeführt werden und liefert den Charakter der betreffenden Darstellung, wie er in Glg.(2.4) definiert wurde; die Summe über $m(\vec{\alpha})$ kann ebenfalls ausgeführt werden, und man findet:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=1}^r \alpha_v \hat{Q}_v} \right) = \sum_{\vec{\alpha}} \sum_{m(\vec{\alpha})} \langle m | e^{-\beta \hat{H}} | m \rangle \chi_{\vec{\alpha}}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= \sum_{\vec{\alpha}} \frac{\sum_{n(\vec{\alpha})} \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle}{\dim(\vec{\alpha})} \chi_{\vec{\alpha}}(\dots) = \sum_{\vec{\alpha}} \frac{\mathcal{Z}_{\vec{\alpha}}(TV)}{\dim(\vec{\alpha})} \cdot \chi_{\vec{\alpha}}(\alpha_1, \dots, \alpha_r); \end{aligned}$$

in der zweiten Gleichung wurde Glg.(2.5) verwendet, denn $\mathcal{Z}_{\vec{\alpha}}$ ist nach Glg.(2.2) definiert als Summe über alle Zustände eines Multipletts. Q.e.d.

Mit dem Beweis von Glg.(2.8) ist zugleich auch die Praktikabilität der Projektionsmethode gezeigt, denn im Falle vernachlässigbarer Wechselwirkung, $\hat{H} \equiv \hat{H}_0$, kann mit Hilfe von Glg.(2.8) die generierende Funktion leicht berechnet werden: $\hat{H}_0$ ist in der Besetzungszahldarstellung diagonal und auch die Ladungsoperatoren bzw. Generatoren der abelschen Cartan-Untergruppe der $SU(N)$ lassen sich als Linearkombinationen von geeigneten Teilchenzahloperatoren hinschreiben, was in den folgenden Kapiteln wiederholt zur Anwendung kommen wird. Wie bereits nach Glg.(2.7) angedeutet, reduziert sich damit das Problem der Berechnung einer kanonischen Zustandssumme $\mathcal{Z}_{\vec{\alpha}}$ zu einer bestimmten $SU(N)$ -Darstellung $\vec{\alpha}$ wegen Glg.(2.7) im wesentlichen auf die Auswertung der entsprechenden Gruppenintegrale.

Wie zu erwarten, lassen sich die einfachen Beispiele mit einer inneren $U(1)$ -Symmetrie, die in Kapitel 1.1 vorgestellt wurden, zwanglos in den Zusammenhang der hier ent-

wickelten allgemeinen Projektionsmethode einordnen – die Projektion auf "farblose" Zustände, die in Kapitel 1.2 für ein vereinfachtes Modell des Quark-Glue-Plasmas "per Hand" konstruiert wurde, ging offensichtlich nicht von einer kontinuierlichen Symmetriegruppe aus und stellt daher eher eine Art Gegenbeispiel dar.

Zur Vervollständigung der Projektionsmethode werde ich jetzt noch einen Ausblick auf die Behandlung eines wechselwirkenden Systems geben, die sich zumindest nicht schwieriger gestaltet, als das ohne Berücksichtigung einer inneren Symmetrie der Vielteilchenzustände der Fall ist.

Es sei angenommen, daß sich der Hamilton-Operator des Systems in einen leicht diagonalisierbaren Teil $\hat{H}_0$ und einen (kleinen) "störenden" Wechselwirkungsteil $\hat{H}_1$ aufspalten läßt:

$$(2.9) \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad .$$

Die Herleitung der Projektionsmethode bis zur Glg.(2.8) gilt für einen beliebigen Hamilton-Operator und daher insbesondere für $\hat{H}$ gemäß Glg.(2.9). Die zentrale Größe, die man zur Anwendung des Projektionsverfahrens benötigt, ist die generierende Funktion $\mathcal{Z}$, Glg.(2.3). Es soll im Folgenden eine Störungstheorie für $\mathcal{Z}$ entwickelt werden, die es erlaubt, die Einschränkung der Vielteilchenzustände auf eine gegebene Darstellung der $SU(N)$ -Gruppe exakt zu behandeln. Dazu geht man am einfachsten von Glg.(2.8) aus (die Argumente der betrachteten Funktionen werden der Übersichtlichkeit halber unterdrückt):

$$(2.10) \quad \mathcal{Z} = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} + i \sum_{v=1}^N \alpha_v \hat{Q}_v \right) = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{g} \right) \quad ,$$

wobei $\hat{g}$ ein Element der Cartan-Untergruppe ist, das wegen Glg.(2.1) mit dem Hamilton-Operator kommutiert:

$$(2.11a) \quad [\hat{H}, \hat{g}] \equiv \left[\hat{H}, \exp i \sum_{v=1}^N \alpha_v \hat{Q}_v \right] = 0 \quad .$$

Außerdem gelte (z.B. in der Besetzungszahldarstellung):

$$(2.11b) \quad [\hat{H}_0, \hat{g}] = \sigma .$$

Betrachtet werde nun zunächst der statistische Operator :

$$(2.12a) \quad \hat{\xi} \equiv e^{-\beta \hat{H}} ;$$

er genügt der folgenden Differentialgleichung:

$$(2.12b) \quad \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \beta} = -\hat{H} \hat{\xi} ,$$

mit "Anfangsbedingung",

$$(2.12c) \quad \hat{\xi}(0) = \mathbb{1} .$$

Sei $\hat{\xi}_0$ eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung mit $\hat{H}_0$, dann kann $\hat{\xi}_0$ als eine erste grobe Näherung für $\hat{\xi}$ angesehen werden, die nach Voraussetzung bekannt ist, denn $\hat{H}_0$ sollte diagonalisierbar sein. Als Ausgangspunkt einer Störungstheorie für $\hat{\xi}$ wird die Differentialgleichung (2.12b) in eine Integralgleichung umformuliert, die noch exakt gilt [21]. Man rechnet:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{\beta \hat{H}_0} \hat{\xi}) &= e^{\beta \hat{H}_0} \hat{H}_0 \hat{\xi} + e^{\beta \hat{H}_0} \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \beta} \\ &= e^{\beta \hat{H}_0} (\hat{H}_0 \hat{\xi} - \hat{H} \hat{\xi}) = -e^{\beta \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{\xi} , \end{aligned}$$

mit Hilfe der Glgen.(2.9,12b). Dann folgt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung, Glg.(2.12c), durch Integration der Glg.(2.13):

$$\int_0^\beta d\beta' \frac{\partial}{\partial \beta'} (e^{\beta' \hat{H}_0} \hat{\xi}) = e^{\beta \hat{H}_0} \hat{\xi} - \mathbb{1} = - \int_0^\beta d\beta' e^{\beta' \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{\xi} ,$$

bzw. die gesuchte Integralgleichung:

$$(2.14) \quad \hat{\xi}(\beta) = e^{-\beta \hat{H}_0} - \int_0^\beta d\beta' e^{(\beta-\beta') \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{\xi} .$$

Aus Glg.(2.14) können dann iterativ Näherungslösungen für $\hat{g}$ gewonnen werden, indem man im Integranden zuerst $\hat{g} \approx \hat{g}_0$ setzt und dann $\hat{g}$ nach Glg.(2.14) als neue Näherung wiederum einsetzt usw.:

$$e^{-\beta \hat{H}} \equiv \hat{g}_0 \xrightarrow[\text{Integranden}]{\text{einsetzen im}} \hat{g}_1 \xrightarrow[\text{Integranden}]{\text{einsetzen im}} \hat{g}_2 \dots \rightarrow$$

Nach zweimaliger Iteration bzw. in zweiter Ordnung in dem Störungsterm $\hat{H}_1$ findet man so:

$$\begin{aligned} e^{-\beta \hat{H}} \equiv \hat{g} &= e^{-\beta \hat{H}_0} - \int_0^\beta d\beta' e^{(\beta-\beta')\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-\beta' \hat{H}_0} \\ &+ \int_0^\beta d\beta' \int_0^{\beta'} d\beta'' e^{(\beta'-\beta'')\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{(\beta''-\beta)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-\beta'' \hat{H}_0} - \dots \end{aligned}$$

Dieses Resultat setzt man in Glg.(2.10) ein und findet ebenfalls in zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} (2.15) \quad \tilde{Z} &= \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{g}) - \int_0^\beta d\beta' \text{Tr} (e^{(\beta'-\beta)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-\beta' \hat{H}_0} \hat{g}) \\ &+ \int_0^\beta d\beta' \int_0^{\beta'} d\beta'' \text{Tr} (e^{(\beta'-\beta'')\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{(\beta''-\beta)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-\beta'' \hat{H}_0} \hat{g}) - \dots \end{aligned}$$

Da man Operatoren unter der Spurbildung zyklisch vertauschen kann und $\hat{g}$ nach Glg.(2.11b) auch mit $\hat{H}_0$ kommutiert, gilt für die Korrektur erster Ordnung:

$$\begin{aligned} (2.16) \quad &\int_0^\beta d\beta' \text{Tr} (e^{(\beta'-\beta)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-\beta' \hat{H}_0} \hat{g}) \\ &= \int_0^\beta d\beta' \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g}) = \beta \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g}). \end{aligned}$$

Der Korrekturterm zweiter Ordnung läßt sich vereinfachen, denn unter Verwendung derselben Vertauschungsmöglichkeiten rechnet man einerseits:

$$\begin{aligned} (2.17a) \quad &\int_0^\beta dx \int_0^x dy \text{Tr} (e^{(x-\beta)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{(y-x)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-y\hat{H}_0} \hat{g}) \\ &= \int_0^\beta dx \int_0^x dy \text{Tr} (e^{-\beta \hat{H}_0} e^{(x-y)\hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{(y-x)\hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g}) = \dots \end{aligned}$$

(Forts.)

$$(Forts.) \dots = \int_0^\beta dx \int_0^x du \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} e^{u \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-u \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right),$$

$$u \equiv x - y.$$

Andererseits erhält man aus demselben Ausdruck auch:

$$(2.17b) \dots = \int_0^\beta dx \int_{\beta-x}^\beta dv \operatorname{Tr} \left(e^{-v \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{v-\beta \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right)$$

$$, v \equiv -\beta + x - y$$

$$= - \int_0^\beta dx' \int_{x'}^\beta dv \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} e^{v \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-v \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right)$$

$$= \int_0^\beta dx \int_x^\beta du \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} e^{u \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-u \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right);$$

also durch Summieren und Halbieren der Glgen. (2.17a,b):

$$(2.18) \int_0^\beta dx \int_0^x dy \operatorname{Tr} \left(e^{(x-\beta) \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{(y-x) \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-y \hat{H}_0} \hat{g} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\beta dx \int_0^\beta du \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} e^{u \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-u \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right)$$

$$= \frac{\beta}{2} \int_0^\beta du \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} e^{u \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-u \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right).$$

Aus den Glgen. (2.15-18) ergibt sich insgesamt die Störungsreihe für $\tilde{\mathcal{Z}}$ bis zur zweiten Ordnung in $\hat{H}_1$:

$$(2.19) \quad \tilde{\mathcal{Z}} = \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{g} \right) - \beta \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right)$$

$$+ \frac{\beta}{2} \int_0^\beta du \operatorname{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_0} e^{u \hat{H}_0} \hat{H}_1 e^{-u \hat{H}_0} \hat{H}_1 \hat{g} \right) - \dots$$

Glg. (2.19) kann dann für eine bestimmte Wechselwirkung weiter ausgewertet werden.

Damit ist gezeigt, daß sich die Projektionsmethode auch auf wechselwirkende Systeme anwenden läßt, sofern sie der üblichen störungstheoretischen Behandlung zugänglich sind. Es sei abschließend noch einmal darauf hingewiesen, daß in jedem Fall Glgen. (2.7,8) die beiden zentralen Gleichungen sind, die den Kern der Projektionsmethode darstellen.

2.2 Die Isospinsymmetrie

und Bemerkungen zur Symmetriegruppe $U(1) \times SU(N)$

Ich betrachte in diesem Kapitel die $SU(2)$ -Gruppe als ein für eine innere Symmetriegruppe der starken Wechselwirkung. Die $SU(2)$ ist eine dreiparametrische nicht-abelsche Gruppe mit drei Generatoren $\hat{I}_K$ und dem Casimir-Operator $\hat{C} = \sum_{K=1}^3 \hat{I}_K^2$. Sie ist vom Rang $r=1$, und ihre abelsche Untergruppe wird durch einen hermiteschen Generator $\hat{I}_3$ erzeugt:

$$(2.20) \quad \hat{I}_3 |\bar{I}, \bar{I}_3\rangle = \bar{I}_3 |\bar{I}, \bar{I}_3\rangle, \quad -\bar{I} \leq \bar{I}_3 \leq \bar{I}, \quad 2\bar{I} \in \mathbb{N}_0.$$

In der Grunddarstellung, $\bar{I} = \frac{1}{2}$, gilt $\hat{I}_K = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_K$, mit den Pauli-Matrizen:

$$\hat{\sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der Cartan-Untergruppe sind dann $\hat{g}_C^{(1/2)}(\alpha) = \exp i \frac{\alpha}{2} \hat{\sigma}_3$ bzw. allgemein $\hat{g}_C(\alpha) = \exp i \alpha \hat{I}_3$. Damit berechnet man die Charaktere nach Glg.(2.4):

$$(2.21) \quad \chi_{\bar{I}}(\alpha) = \text{Tr}_{\bar{I}} \hat{g}_C(\alpha) = \sum_{\bar{I}_3(\bar{I})} \langle \bar{I}, \bar{I}_3 | e^{i \alpha \hat{I}_3} | \bar{I}, \bar{I}_3 \rangle,$$

und mit Glg.(2.20),

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{\bar{I}_3 = -\bar{I}}^{\bar{I}} e^{i \alpha \bar{I}_3} = \sum_{\bar{J} = \sigma}^{2\bar{I}} e^{i \alpha (\bar{I} - \bar{J})} \\ &= \frac{\sinh(2\bar{I} + 1) \alpha/2}{\sinh \alpha/2} = \chi_{\bar{I}}^* . \end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsrelation, Glg.(2.6), nimmt dann hier die folgende Gestalt an:

$$(2.22) \quad \int_{\sigma}^{4\pi} d\alpha \frac{\sinh^2 \alpha/2}{2\pi} \chi_{\bar{I}}(\alpha) \chi_{\bar{I}'}(\alpha) = \delta_{\bar{I}\bar{I}'} ;$$

der darstellungsunabhängige Parameterbereich der Cartan-Untergruppe ergibt sich aus der Betrachtung der Gruppenelemente $\hat{g}_C(\alpha)$ in der Grunddarstellung (s.o.) und die Maßfunktion ist offensichtlich $\frac{\sinh^2 \alpha/2}{2\pi}$.

Konkret soll als Beispiel die kanonische Zustandssumme für das Isospindublett ($\vec{I}=1/2$) von Proton ($\vec{I}_3=+1/2$) und Neutron ($\vec{I}_3=-1/2$) berechnet werden, die beide zusätzlich zu der SU(2)-"Ladung" die Baryonenzahl $A=1$ tragen. D.h. die betrachtete Symmetriegruppe ist jetzt $U_A(1) \times SU_{\vec{I}}(2)$. Gesucht ist die auf einen festen (Gesamt-)Isospin $\vec{I}$ und gegebene Baryonenzahl A projizierte Zustandssumme.

Zu diesem Zweck kann man die Überlegungen aus Kapitel 2.1 direkt verallgemeinern auf die Gruppe $U(1) \times SU(N)$ und erhält statt Glg.(2.8):

$$(2.23) \quad \mathcal{Z}(T, V, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H} + i \sum_{v=0}^N \alpha_v \hat{Q}_v} \right),$$

worin $\hat{Q}_0$ der zu der U(1)-Gruppe gehörige Ladungsoperator sein soll. Bei der Ableitung des entsprechenden Projektionsformalismus muß man insbesondere nur beachten, daß die Zerlegung des Hilbert-Raumes in Multipletts mit fester U(1)-Ladung bei gegebenen SU(N)-"Hauptquantenzahlen" $\vec{\alpha}$ erfolgt: $\alpha_0 = \alpha_0(\vec{\alpha})$, d.h. für gegebenes $\vec{\alpha}$ sind nicht beliebige α_0 möglich. - Im vorliegenden Beispiel bedeutet das, daß man aus Protonen und Neutronen etwa einen ($i=3/2$)-Zustand nur mit der Baryonenzahl $A=3+2k$, k nicht-negativ und ganz, aufbauen kann, da $i=3/2$ zunächst einmal aus drei ($i=1/2$)-Nukleonen mit der Baryonenzahl 3 aufgebaut wird, wozu aber noch $2k$ zu $i=0$ gekoppelte Nukleonen treten können. Allgemein findet man daher die Relation,

$$(2.24) \quad A = 2(I+k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

zwischen Baryonenzahl und Gesamtisospin für Zustände, die lediglich aus Protonen und Neutronen bestehen. - Die Projektion auf die jeweilige U(1)-Quantenzahl wird ansonsten bewirkt wie in Kapitel 1.1 und praktisch unabhängig von der SU(N)-Projektion.

Zunächst erhält man für $U_A(1) \times SU_{\vec{I}}(2)$ nach Glg.(2.23) und ohne Berücksichtigung einer Wechselwirkung:

Es folgt dann mit der Projektionsmethode i.A. gemäß den Glgen.(2.7,8), im besonderen Beispiel aber auch wegen der Glg.(2.21) (Charaktere), Glq.(2.22) (Orthogonalitätsrelation) und mit der generierenden Funktion, Glg.(2.26):

$$\begin{aligned}
 (2.27) \quad \tilde{Z}_{A,I} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_0}{2\pi} e^{-iA\alpha_0} \cdot (2I+1) \int_0^{4\pi} d\alpha_1 \frac{\sinh^2 \alpha_1 / 2}{2\pi} \chi_I(\alpha_1) \tilde{Z}(\alpha_0, \alpha_1) \\
 &= (2I+1) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_0}{2\pi} e^{-i\alpha_0 A} \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha_1}{2\pi} \sinh \frac{\alpha_1}{2} \sinh (2I+1) \frac{\alpha_1}{2} \\
 &\quad \cdot \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} e^{iK(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2})} e^{iL(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{2})} \bar{I}_K^{Nukl} (2\frac{\alpha_1}{2}) \bar{I}_L^{Nukl} (2\frac{\alpha_1}{2}),
 \end{aligned}$$

wobei wieder dieselbe Fourier-Bessel-Entwicklung eingesetzt wurde wie in Glg.(1.10) (s.S.7f). Weiter rechnet man dann die elementaren Integrale aus und erhält so:

$$\begin{aligned}
 (2.28) \quad \tilde{Z}_{A,I}^{(TV)} &= (2I+1) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{A-l}^{Nukl} (2\frac{\alpha_1}{2}) \bar{I}_l^{Nukl} (2\frac{\alpha_1}{2}) \\
 &\quad \cdot \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha_1}{2\pi} e^{i(A-2l)\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2I\frac{\alpha_1}{2} - \cos 2(I+1)\frac{\alpha_1}{2}) \\
 &= \frac{2I+1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{A-l}^{Nukl} (2\frac{\alpha_1}{2}) \bar{I}_l^{Nukl} (2\frac{\alpha_1}{2}) \\
 &\quad \cdot \left(\delta_{-2(I-l),A} + \delta_{2(I+l),A} - \delta_{-2(I+1-l),A} - \delta_{2(I+1+l),A} \right) \\
 &= \begin{cases} (2I+1) \left(\bar{I}_{\frac{A}{2}-I}^{Nukl} \bar{I}_{\frac{A}{2}+I}^{Nukl} - \bar{I}_{\frac{A}{2}-(I+1)}^{Nukl} \bar{I}_{\frac{A}{2}+(I+1)}^{Nukl} \right) \\ \quad , \text{ für } I + \frac{A}{2} \text{ ganz} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Man vergleiche dieses Resultat einer Projektion auf Baryonenzahl und Isospin mit dem einfacheren Ausdruck, der in Glg.(1.10) für eine kanonische Zustandssumme mit exakter Baryonenzahl- und Strangenesserhaltung abgeleitet wurde, d.h. für ein System mit zwei verschiedenen U(1)-Symmetrien. - Genauer: zu vergleichen ist das Resultat der Baryonenzahl-Isospin-Projektion für Nukleonen mit dem Ergebnis

für ein beispielsweise angenommenes "x-Teilchen", das die beiden $U(1)$ -Ladungen Q_α und Q_β trage und in den Zuständen $\alpha=1, \beta=\pm 1/2$ existieren könnte. Indem man genau die gleiche Rechnung wie auf den S.6ff, die zu dem Ergebnis in Glg.(1.10) führte, noch einmal wiederholt für die "x-Teilchen" anstelle der Nukleonen und Hyperonen, erhält man eine entsprechende kanonische Zustandssumme zu den Gesamtladungszahlen N_α und N_β :

$$(2.29) \quad Z_{N_\alpha, N_\beta} = \int_{\frac{N_\alpha + N_\beta}{2}}^{\infty} (2Z_1^{(\alpha)}) \int_{\frac{N_\alpha - N_\beta}{2}}^{\infty} (2Z_1^{(\alpha)}) ,$$

ohne jede Einschränkung (wohlgemerkt: der Unterschied zu Glg.(1.10) kommt einzig durch die Wahl anderer Ladungszahlen α, β anstelle von α, s (s.S.6) zustande). Das Resultat in Glg.(2.29) weist nun offensichtlich eine große Ähnlichkeit zu dem in Glg.(2.28) auf! Allerdings deutet gerade die Zusatzbedingung im Falle der $U(1) \times SU(2)$ -Projektion, $I+A/2$ ganz, auf die kompliziertere Gruppenstruktur im Vergleich mit $U(1) \times U(1)$ hin; sie entspricht genau der bereits auf S.34 im Text begründeten Beziehung zwischen Baryonenzahl und Gesamtisospin, Glg.(2.24), wobei jedoch in der Ableitung von Glg.(2.28) auch die Antinukleonen berücksichtigt wurden. Im Falle der nicht-abelschen Symmetrie tritt außerdem ein typischer Zusatzterm auf, der von der komplizierteren Maßfunktion verursacht wird, was in den Glgen.(2.28) unmittelbar zu erkennen ist.

Diese Betrachtungen zu einem Beispiel der (einfachsten nicht-abelschen) Isospinsymmetrie der Nukleonen mögen zur Erläuterung der im vorigen Kapitel hergeleiteten gruppentheoretischen Projektionsmethode genügen, und ich wende mich anschließend dem System eines Quark-Glue-Plasmas mit der inneren $SU_c(3)$ -Symmetrie zu. Gerade für Quarks und Gluonen ist ja die vereinfachende Annahme einer vernachlässigbaren Restwechselwirkung unter physikalisch interessanten Bedingungen durchaus gerechtfertigt, worauf bereits in Kapitel 1.2 hingewiesen wurde.

3. Die $SU_C(3)$ -Color-Symmetrie von Quarks und Gluonen

Die Untersuchung der $SU_C(3)$ -Symmetrie von Quarks und Gluonen stellt den Hauptgegenstand meiner Arbeit dar, und ich werde in den folgenden Kapiteln aufzeigen, wie sich diese, durch die starke Wechselwirkung im Rahmen der QCD-Eichtheorie bestimmte, exakte innere Symmetrie auf die Eigenschaften der Materie auswirkt, insofern sie sich in der Phase von asymptotisch freien Quarks und Gluonen befindet.

Die perturbative Restwechselwirkung von Quarks und Gluonen ist bereits Gegenstand einer Vielzahl von Arbeiten gewesen, und es sei darum auf einige Review-Artikel und Konferenz-Proceedings hingewiesen, in denen die Quark-Gluon-Wechselwirkung in Analogie zur QED und u.a. in Hinblick auf Eigenschaften der heißen bzw. dichten Quark-Gluon-Plasmaphase behandelt wird [10,15,22,23]; aus den angeführten Referenzen ist auch die umfangreiche Originalliteratur zu diesem Problemkreis zu erschließen.

Der Orientierung halber sei das Ziel der nachfolgenden Untersuchung kurz umrissen: ein näherungsweise wechselwirkungsfreies Quark-Gluon-Plasma soll quantenstatistisch unter der Einschränkung beschrieben werden, daß nur "physikalische" (farblose) Zustände betrachtet werden; natürlich spiegelt die Tatsache, daß nicht beliebige, aus Quarks und Gluonen aufgebaute Vielteilchenzustände beobachtet werden können genau den bisher unverstandenen Confinement-Effekt der starken Wechselwirkung wieder, ebenso wie der in Kapitel 1.2 phänomenologisch eingeführte Druck des nicht-perturbativen Vakuums gemäß den Glgen.(1.34). Mit Hilfe der in Kapitel 2.1 entwickelten Projektionsmethode ist also eine kanonische Zustandssumme zu festen $SU_C(3)$ -Quantenzahlen zu berechnen, nämlich entsprechend der Singlettdarstellung mit den Quantenzahlen des Vakuums. Außerdem soll die drittelzahlige Baryonenladung der Quarks berücksichtigt werden, d.h. die zugrundegelegte innere Symmetriegruppe wird hier dann $U_A(1) \times SU_C(3)$ sein.

In Kapitel 3.1 werden die zur Berechnung der kanonischen Zustandssumme für ein farbloses Quark-Glue-Plasma benötigten gruppentheoretischen Hilfsmittel entwickelt, wie Charaktere und Orthogonalitätsrelation derselben für die Gruppe $SU(3)$. Weiterhin wird die generierende Funktion für farbige Quarks und Gluonen bestimmt und eine einfache physikalische Interpretation derselben im Zusammenhang mit der QCD gegeben.

Anschließend wird in Kapitel 3.2 die kanonische Zustandssumme näherungsweise analytisch und numerisch exakt ausgewertet und zu einer ersten Betrachtung thermodynamischer Eigenschaften kleiner Plasmatröpfchen herangezogen, was dann in Kapitel 4 fortgesetzt und in Richtung auf ein Modell des Phasenübergangs zwischen hadronischer Materie und Quark-Glue-Plasma erweitert wird.

3.1 Gruppentheoretische Hilfsmittel für die $SU(3)$ -Gruppe

Die Berechnung der Charaktere mit Hilfe von Tensoren.

Um wie in Glg.(2.7) eine Projektion auf ein bestimmtes $SU(3)$ -Multiplett durchführen bzw. die dementsprechende kanonische Zustandssumme auswerten zu können, müssen die Charaktere der Gruppe bekannt sein und hernach auch ihre Orthogonalitätsrelation. Sie sollen jetzt berechnet werden. Wie im Beispiel der Isospinsymmetrie werde ich dazu explizite Darstellungen der Gruppe verwenden. - Vollständigkeitshalber sei angemerkt, daß auch ein Verfahren zur Berechnung der Charaktere kompakter Lie-Gruppen existiert, welches nicht den Weg über die Konstruktion von Darstellungen nimmt; es ist aber weniger anschaulich und benötigt tiefergehende Resultate der allgemeinen Darstellungstheorie [17,20]. - Im Unterschied zur $SU(2)$ -Gruppe, deren vektorielle Darstellungen bzw. Multipletts von Zustandsvektoren von der Drehimpulsalgebra her wohlbekannt sind (siehe Glgen.(2.20-22)), werde ich nun Darstellungen in Form von (Zustands-)Tensoren konstruieren [24].

Ein n-dimensionaler Tensor A über einem komplexen (reellen) Vektorraum wird definiert durch die Angabe seiner indizierten Elemente:

$$(3.1) \quad A \equiv \left\{ A_{\mu q \dots r}^{i k \dots l} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \right\},$$

wobei jeder Index die Werte 1 bis n annehmen kann und die Anzahl der oberen ("kontravarianten") und unteren ("kovarianten") Indices zusammengekommen der Rang des Tensors heißt. Weiterhin gehört zur Definition eines Tensors die Angabe seines Verhaltens unter Koordinatentransformationen: Sei $\hat{T}$ eine spezielle unitäre (orthogonale) Transformationsmatrix, dann wird der transformierte Tensor definiert durch:

$$(3.2) \quad A' \equiv \hat{T} A \hat{T}^+,$$

mit den Komponenten,

$$(3.3) \quad A'_{\mu q \dots r}^{i k \dots l} \equiv T_{\mu}^{\alpha} T_{q}^{\beta} \dots T_{r}^{\gamma} A_{\alpha \beta \dots \gamma}^{\lambda \mu \dots \nu} T^{+\delta} T^{+k} T^{+l};$$

wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt gelte von nun an die Einsteinsche Summenkonvention. - Die Definition eines Tensors, Glgen.(3.1-3), stellt offensichtlich eine Verallgemeinerung der Begriffe eines Skalars (i.e. Tensor vom Rang 0), eines Vektors (i.e. Tensor vom Rang 1) oder einer Matrix (i.e. Tensor vom Rang 2) dar.- Wegen der Verknüpfung von unitären Transformationen $\hat{T}$ mit hermiteschen Operatoren $\hat{\epsilon}$ (vgl.S.23),

$$\hat{T}(\alpha) = e^{i\alpha \hat{\epsilon}}, \alpha \in \mathbb{R}, \hat{\epsilon}^+ = \hat{\epsilon},$$

kann man sogleich berechnen, wie ein hermitescher Operator auf einen Tensor wirkt. Denn für eine infinitesimale Transformation $T(\epsilon)$ folgt aus der Definition, Glg.(3.2), und wegen der Hermiteizität von $\hat{\epsilon}$ in Ordnung ϵ :

$$(3.4) \quad A' = \hat{T}(\epsilon) A \hat{T}(\epsilon)^+ \cong (1 + i\epsilon \hat{\epsilon}) A (1 - i\epsilon \hat{\epsilon}) \\ \cong A + i\epsilon (\hat{\epsilon} A - A \hat{\epsilon}) \equiv A + i\epsilon [\hat{\epsilon}, A],$$

wobei wegen Glg.(3.3) der Kommutator einen neuen Tensor bezeichnet mit den Komponenten:

$$(3.5) \quad [\hat{t}, A]_{\mu q \dots r}^{jk \dots l} \equiv t_{\mu}^{\alpha} A_{\alpha q \dots r}^{jk \dots l} + t_{q}^{\beta} A_{\mu \beta \dots r}^{jk \dots l} + \dots \\ + t_{r}^{\gamma} A_{\mu q \dots \gamma}^{jk \dots l} - t_{\alpha}^{\bar{j}} A_{\mu q \dots r}^{\alpha k \dots l} \\ - t_{\beta}^{\bar{k}} A_{\mu q \dots r}^{\alpha \beta \dots l} - \dots - t_{\gamma}^{\bar{l}} A_{\mu q \dots r}^{\alpha \beta \dots \gamma} ;$$

damit ist dann die Anwendung eines hermiteschen Operators auf einen Tensor allgemein definiert durch den Kommutator von beiden. In Glg.(3.4) wurde die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ verwendet, die einen speziellen Tensor darstellt,

$$(3.6) \quad \mathbb{1} \equiv \left\{ \delta_{\mu}^{\bar{j}}, \delta_{\mu}^{\bar{j}} = \begin{cases} 1, \text{ f. } \mu = j \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \right\} ;$$

dieser δ -Tensor hat die Eigenschaft, invariant unter (speziellen) unitären Transformationen zu sein, denn:

$$\delta'_{\mu}^{\bar{j}} = T_{\mu}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta} T_{\beta}^{+\bar{j}} = T_{\mu}^{\beta} T_{\beta}^{+\bar{j}} = \delta_{\mu}^{\bar{j}} .$$

In derselben Weise zeigt man, daß das innere Produkt zweier Tensoren ebenfalls invariant ist, vorausgesetzt es führt zu einer skalaren Kombination S der Tensorelemente:

$$S = A_{\mu q \dots r}^{jk \dots l} B_{\bar{j} k \dots l}^{\mu q \dots r} .$$

Ein weiterer Tensor mit dieser Eigenschaft ist der folgende $\mathcal{E}$ -Tensor:

$$(3.7) \quad \mathcal{E} \equiv \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu q \dots r} &, \quad \mathcal{E}_{\mu q \dots r} = 1, \text{ f. } \mu, q, \dots, r = 1, 2, \dots, n \\ &\quad \text{u. jede gerade Permut.} \\ &\quad \text{dieser Folge} \\ &= -1, \text{ f. jede ungerade} \\ &\quad \text{Permutation dieser Folge} \\ &= 0, \text{ sonst} \end{aligned} \right\} .$$

Analog dazu kann man den $\mathcal{E}$ -Tensor mit kontravarianten Indices definieren:

$$(3.7') \quad \varepsilon_{\mu\nu\cdots\kappa} \equiv \varepsilon_{\nu\mu\cdots\kappa} \quad .$$

Die Invarianz unter einer speziellen unitären Transformation $\hat{T}$ folgt aus:

$$\begin{aligned} 1. \quad \varepsilon'_{1\cdots j\cdots k\cdots h} &= (\hat{T}\varepsilon)_{1\cdots j\cdots k\cdots h} \\ &= T_1^\alpha T_j^\beta T_k^\gamma T_h^\delta \varepsilon_{\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\delta} \\ &= -T_1^\alpha T_k^\gamma T_j^\beta T_h^\delta \varepsilon_{\alpha\cdots\gamma\cdots\beta\cdots\delta} \\ &= -\varepsilon'_{1\cdots k\cdots j\cdots h} \quad , \end{aligned}$$

die totale Antisymmetrie von ε' folgt also aus derjenigen von ε ;

$$2. \quad \varepsilon'_{12\cdots h} = T_1^\alpha T_2^\beta \cdots T_h^\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\cdots\gamma} = \det T = 1 \quad .$$

Nach dieser kurzen Einführung in die Tensoralgebra soll jetzt untersucht werden, inwiefern sich Tensoren zur Konstruktion von Darstellungen insbesondere der $SU(3)$ -Gruppe eignen. Bisher ist nur gezeigt worden, wie sich Tensoren unter speziellen unitären Transformationen verhalten bzw. wie hermitesche Operatoren auf sie wirken. Man bemerkt, daß beide Operationen den Rang eines Tensors nicht verändern, sondern Elemente von Tensoren in Linearkombinationen von solchen überführen. Ein n -dimensionaler Tensor vom Rang r hat n^r Elemente, und diese Anzahl von Elementen stimmt i.A. nicht mit der Dimension der Multipletts überein, wie man sie etwa bei der Isospinsymmetrie kennt - i.e. " $2j+1$ ". Man kann also i.A. die Elemente eines Tensors nicht unmittelbar als Basis einer Darstellung wählen, sondern muß erst geeignete Linearkombinationen aus ihnen bilden; man nennt ein solches Vorgehen die Ausreduzierung eines Tensors. Sätze von diesen Linearkombinationen, die durch spezielle unitäre Transformationen auf sich selbst abgebildet werden, nennt man irreduzible Tensoren. Sie erst können mit den Multipletts bzw. unitären irreduziblen

Darstellungen der betreffenden Gruppe identifiziert werden. Zwei notwendige - und zusammengekommen im Falle der Gruppen $SU(2)$ und $SU(3)$ auch hinreichende - Bedingungen für die Irreduzibilität eines Tensors werden im Folgenden hergeleitet.

i) Ein Tensor A ist nur dann irreduzibel, wenn gilt:

$$(3.8) \quad \delta_j^p A^{jk\dots l}_{\mu q\dots r} = 0,$$

für jeden kovarianten Index p und jeden kontravarianten Index j ; A heißt dann ein Tensor mit verschwindender Spur,

$$\text{Tr } A = 0.$$

Beweis: es wird gezeigt, daß A reduzibel ist, falls Glg.(3.8) nicht erfüllt ist. Sei $\text{Tr } A \neq 0$, d.h. zumindest für ein Paar aus oberem und unterem Index gelte:

$$\delta_k^q A^{j\dots k\dots l}_{\mu\dots q\dots r} \equiv B^{j\dots l}_{\mu\dots r} \neq 0;$$

man erhält also einen Tensor B von niedrigerem Rang als A , dessen Elemente Linearkombinationen der Elemente des Tensors A sind und nicht alle verschwinden. Außerdem werden die Elemente von B durch eine spezielle unitäre Transformation auf Linearkombinationen von sich selbst abgebildet, womit sich der Tensor A als reduzibel erweist.

Q.e.d.

ii) Ein zwei- oder dreidimensionaler Tensor ist nur dann irreduzibel, wenn er total symmetrisch in seinen oberen und unteren Indices ist:

$$(3.9) \quad A^{j\dots k\dots l\dots m}_{\mu\dots q\dots r\dots s} = A^{j\dots l\dots k\dots m}_{\mu\dots q\dots r\dots s} \\ = A^{j\dots l\dots k\dots m}_{\mu\dots r\dots q\dots s}$$

für jedes Paar von ko- oder kontravarianten Indices.

Beweis: sei (2-dim. Fall), $B^{j\dots m}_{\mu\dots q} \equiv \epsilon_{kl} A^{j\dots k\dots l\dots m}_{\mu\dots q}$;

wiederum erweist sich damit A als reduzibel, falls nicht alle Elemente von B verschwinden, d.h. A ist nur dann irreduzibel falls gilt:

$$A_{\mu \dots q}^{j \dots k \dots l \dots m} = A_{\mu \dots q}^{j \dots l \dots k \dots m} ;$$

sei (3-dim. Fall),

$$B_{\mu q \dots r}^{j \dots m} \equiv \epsilon_{\mu k l} A_{q \dots r}^{j \dots k \dots l \dots m} ;$$

es folgt wie oben, daß A nur dann irreduzibel ist, falls gilt:

$$A_{q \dots r}^{j \dots k \dots l \dots m} = A_{q \dots r}^{j \dots l \dots k \dots m} .$$

Analog beweist man unter Verwendung der ϵ -Tensoren mit kontravarianten Indices die totale Symmetrie in den kovarianten Indices eines irreduziblen zwei- oder dreidimensionalen Tensors. Q.e.d.

Betrachtet werde von jetzt an speziell die Gruppe $SU_c(3)$, die von den acht hermiteschen Gell-Mann-Matrizen erzeugt wird (siehe auch die am Anfang von Kapitel 2.1 zusammengestellten Eigenschaften der $SU(N)$ -Gruppe; eine ausführliche Untersuchung der näherungsweise gültigen $SU(3)$ -"-flavor"-Symmetrie der Hadronen findet man z.B. in der nachstehenden Referenz) [25]:

(3.10)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2\hat{I}_3, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \sqrt{3} \hat{Y}_8, \end{aligned}$$

wobei mit $\hat{I}_3$, $\hat{Y}_8$ die beiden diagonalen Generatoren (Ladungsoperatoren) der abelschen Cartan-Untergruppe bezeichnet sind, die auch Color-Isospin und -Hyperladung genannt werden; tatsächlich erkennt man etwa in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sofort die Generatoren einer $SU(2)$ -Untergruppe wieder (vgl. die Pauli-Matrizen nach Glg.(2.20)).

Um die Charaktere der $SU_C(3)$ -Gruppe gemäß Glg.(2.4) zu berechnen, muß zunächst untersucht werden, wie die beiden Ladungsoperatoren auf ein Multipllett bzw. einen irreduziblen Tensor wirken. Sei deshalb A ein irreduzibler $SU_C(3)$ -Tensor mit P unteren und Q oberen Indices, die jeweils die Werte $1, 2, 3$ annehmen. Offenbar sind sowohl der Rang dieses irreduziblen Tensors als aber auch die nicht-negativen ganzen "Quantenzahlen" P und Q invariant unter $SU_C(3)$ -Transformationen und sollen daher zur Klassifizierung der Darstellungen dienen; es wird sich zeigen, daß z.B. die Dimension der Multipletts als Funktion von P und Q anzugeben ist. Daß gerade zwei solche Quantenzahlen auftreten, war zu erwarten, da die $SU_C(3)$ -Gruppe vom Rang zwei ist und daher zwei Casimir-Operatoren existieren, deren Eigenwerte alternativ zu P und Q zur Klassifizierung der Darstellungen herangezogen werden können [26].

Wegen der totalen Symmetrie eines irreduziblen Tensors in den ko- und kontravarianten Indices, Glg.(3.9), wird ein Tensorelement eindeutig durch die Angabe der Anzahlen e, z, d bzw. e', z', d' von Einsen, Zweien und Dreien unter den unteren bzw. oberen Indices charakterisiert; daher kann man in Abänderung der Bezeichnungsweise, Glg.(3.1), für irreduzible $SU_C(3)$ -Tensoren $A_{P,Q}$ schreiben:

$$(3.11) \quad A_{P,Q} \equiv \left\{ A(e, z, d; e', z', d'); \begin{array}{l} e+z+d=P \\ e'+z'+d'=Q \end{array} \right\}.$$

Jetzt berechnet man nach Glg.(3.5) und mit den λ -Matrizen aus Glg.(3.10):

$$\begin{aligned} (3.12) \quad [\hat{I}_3, A_{P,Q}] &= \frac{1}{2} [\lambda_3, A_{P,Q}] \\ &= \frac{1}{2} (e\lambda_{3,1} + z\lambda_{3,2} - e'\lambda_{3,1} - z'\lambda_{3,2}) A_{P,Q} \\ &= \frac{1}{2} (e - e' + z' - z) A_{P,Q}, \end{aligned}$$

und,

$$(3.13) \quad [\hat{Y}_8, A_{P,Q}] = \frac{1}{\sqrt{3}} [\lambda_8, A_{P,Q}] = \dots$$

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \dots &= \frac{1}{13'} \left(e \lambda_{(8)}^1 + 2 \lambda_{(8)}^2 + d \lambda_{(8)}^3 - e' \lambda_{(8)}^1 - 2' \lambda_{(8)}^2 - d' \lambda_{(8)}^3 \right) A_{P,Q} \\
 &= \frac{1}{3} (e + 2 - 2d - e' - 2' + 2d') A_{P,Q} \\
 &\stackrel{(3.14)}{=} \left(\frac{1}{3} (P - Q) - d + d' \right) A_{P,Q} \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei selbstverständlich benutzt wurde, daß die λ -Matrizen auch Tensoren vom Rang zwei sind, $\lambda_{ij} = \left\{ \lambda_j, \frac{e}{k} \right\}$.

Aus den Glgen. (3.12, 13) wird ersichtlich, daß die Elemente eines irreduziblen Tensors tatsächlich als Eigenzustände der Ladungsoperatoren interpretiert werden können und daher ihre Gesamtheit ein Multiplett aufspannt bzw. eine Darstellung (P, Q) der $SU_C(3)$. - Es sei an dieser Stelle außerdem noch auf einen Vorteil der Konstruktion von tensoriellen Darstellungen hingewiesen, der darin besteht, daß die Generatoren der Gruppe unabhängig von der jeweiligen Darstellung bleiben, d.h. im Falle der $SU_C(3)$ betrachtet man immer dieselben λ -Matrizen, Glgen. (3.10); im Gegensatz dazu müssen etwa die Generatoren der $SU(2)$ für die häufig verwendeten vektoriellen Darstellungen in jedem Einzelfall extra bestimmt werden, denn die Pauli-Matrizen sind nur für die Grunddarstellung $S = 1/2$ zutreffend.

dann

Nach dieser umfangreichen Vorbereitung, die zur expliziten Konstruktion der irreduziblen Darstellungen der $SU_C(3)$ in Form von Tensoren führte, lassen sich schließlich auch die Charaktere der Gruppe berechnen, so wie sie in Glg. (2.4) allgemein definiert wurden:

$$(3.14) \quad \chi_{(P,Q)}(\varphi, \psi) \equiv \text{Tr}_{(P,Q)} e^{i\varphi \hat{I}_3 + i\psi \hat{Y}_8} .$$

Man kann jetzt die Spurbildung über alle Zustände eines Multipletts (P, Q) durchführen, indem man die diagonalen Operatoren in Glg. (3.14) durch ihre in den Glgen. (3.12, 13) berechneten Eigenwerte ersetzt und über alle Elemente eines irreduziblen Tensors summiert:

$$(3.15) \quad \text{mit} \quad \alpha_3 \equiv e^{i\varphi}, \quad \alpha_8 \equiv e^{i\psi},$$

$$(3.15) \quad \sum_{\substack{P \\ e, z, d=0 \\ e+z+d=P}}^P \sum_{\substack{Q \\ e', z', d'=0 \\ e'+z'+d'=Q}}^Q \alpha_3^{\frac{1}{2}(e-e'+z'-z)} \alpha_8^{\frac{1}{3}(P-Q)-d+d'} \equiv \chi_{(P,Q)}^{(\varphi, \psi)}.$$

$\chi_{(P,Q)}$ ist aber noch nicht der vollständig korrekte Ausdruck für die Charaktere, da in die Berechnung der Eigenwerte von $\hat{I}_3$ und $\hat{Y}_8$ und damit in $\chi_{(P,Q)}$ lediglich die totale Symmetrie des Tensors $A_{P,Q}$ in den oberen und unteren Indices eingeht (s. Glgen. (3.12,13)), nicht aber notwendigerweise die Bedingung erfüllt sein muß, daß seine Spur verschwindet, Glg. (3.8). Deshalb muß i.A. von $\chi_{(P,Q)}$ noch der entsprechende Beitrag der Spur des Tensors abgezogen werden. Durch die Spurbildung erhält man hier einen total symmetrischen Tensor mit $P-1$ ko- und $Q-1$ kontravarianten Indices, so daß also gilt:

$$(3.16) \quad \chi_{(P,Q)}^{(\varphi, \psi)} = \chi_{(P,Q)}^{(\varphi, \psi)} - \chi_{(P-1, Q-1)}^{(\varphi, \psi)}.$$

Man erhält dann (vgl. die nach Glg. (3.17) folgenden Zwischenrechnungen:

$$(3.17) \quad \chi_{(P,Q)}^{(\varphi, \psi)} = \frac{e^{i \frac{2}{3}(Q-P)\psi}}{4 \sinh \frac{1}{2}(\psi + \frac{\varphi}{2}) \sinh \frac{\varphi}{2} \sinh \frac{1}{2}(\psi - \frac{\varphi}{2})} \cdot \left(e^{\frac{i(P-Q)\psi}{\sinh(P+Q+2)\frac{\varphi}{2}}} - e^{\frac{i(P+1)\psi}{\sinh(P+1)\frac{\varphi}{2}}} - e^{\frac{-i(Q+1)\psi}{\sinh(Q+1)\frac{\varphi}{2}}} \right).$$

Zwischenrechnungen

1. Berechnung von $\chi_{(P,Q)}^{(\varphi, \psi)}$ nach Glg. (3.15):

$$\chi_{(P,Q)}^{(\varphi, \psi)} = \alpha_8^{\frac{1}{3}P} \sum_{\substack{P \\ e, z, d=0 \\ e+z+d=P, \text{ s. (3.11)}}}^P \sqrt{\alpha_3}^{e-z} \alpha_8^{-d} \cdot \left\{ P \rightarrow Q; \alpha_{3,8} \rightarrow \alpha_{3,8}^{-1}; e, z, d \rightarrow e', z', d' \right\} \\ = \dots$$

$$\dots = \alpha_8^{\frac{1}{3}P} \sum_{z=0}^P \sum_{\ell=0}^{P-z} \sqrt{\alpha_3}^{\ell-z} \alpha_8^{\ell+z-P} \quad (3.11)$$

$$\cdot \left\{ P \rightarrow Q; \alpha_{3,8} \rightarrow \alpha_{3,8}^{-1}; \ell, z, d \rightarrow \ell', z', d' \right\}$$

$$= \alpha_8^{-\frac{2}{3}P} \sum_{z=0}^P \left(\frac{\alpha_8}{\sqrt{\alpha_3}} \right)^z \sum_{\ell=0}^{P-z} (\alpha_8 \sqrt{\alpha_3})^\ell \cdot \{ - // - \}$$

, unter Verwendung von :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^h = \frac{x^{h+1} - 1}{x - 1} \quad (\infty),$$

$$= \alpha_8^{-\frac{2}{3}P} \sum_{z=0}^P \left(\frac{\alpha_8}{\sqrt{\alpha_3}} \right)^z \frac{(\alpha_8 \sqrt{\alpha_3})^{P-z+1} - 1}{\alpha_8 \sqrt{\alpha_3} - 1} \cdot \{ - // - \}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \alpha_8^{-\frac{2}{3}P} \frac{1}{\alpha_8 \sqrt{\alpha_3} - 1} \left((\alpha_8 \sqrt{\alpha_3})^{P+1} \frac{\alpha_3^{-1} - 1}{\alpha_3^{-1} - 1} - \frac{(\frac{\alpha_8}{\sqrt{\alpha_3}})^{P+1} - 1}{\frac{\alpha_8}{\sqrt{\alpha_3}} - 1} \right) \cdot \{ - // - \}$$

$$\stackrel{(3.15)}{=} \alpha_8^{-\frac{2}{3}iP\psi} \frac{1}{\alpha_8^{\frac{i(\psi+\frac{\varphi}{2})}{2}} - 1} \left(\alpha_8^{\frac{i(P+1)(\psi+\frac{\varphi}{2})}{2}} \frac{\alpha_3^{-i(P+1)\varphi} - 1}{\alpha_3^{-i\varphi} - 1} - \frac{\alpha_8^{\frac{i(P+1)(\psi-\frac{\varphi}{2})}{2}} - 1}{\alpha_8^{\frac{i(\psi-\frac{\varphi}{2})}{2}} - 1} \right)$$

$$\cdot \left\{ P \rightarrow Q; \varphi \rightarrow -\varphi; \psi \rightarrow -\psi \right\}$$

2. Berechnung von $\chi_{(P,Q)}^{(\varphi,\psi)}$ nach Glg.(3.16):

diese Rechnung erfolgt durch elementare algebraische Umformungen unter Verwendung des Resultates für $\chi_{(P,Q)}^{(\varphi,\psi)}$ aus der vorhergehenden Zwischenrechnung, mit

$$x \equiv \psi + \frac{\varphi}{2}, \quad y \equiv \psi - \frac{\varphi}{2};$$

$$\begin{aligned} \chi_{(P,Q)}^{(\varphi,\psi)} &= \frac{e^{\frac{2}{3}i(Q-P)\psi}}{(e^{i\bar{x}}-1)(e^{-i\bar{x}}-1)} \left(\left\{ e^{\frac{i(P+1)x}{e^{i\varphi}-1} - \frac{e^{-i(P+1)y}}{e^{i\varphi}-1}} - \frac{e^{-i(P+1)y}}{e^{i\varphi}-1} \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ e^{\frac{-i(Q+1)x}{e^{i\varphi}-1} - \frac{e^{-i(Q+1)y}}{e^{i\varphi}-1}} - \frac{e^{-i(Q+1)y}}{e^{i\varphi}-1} \right\} \\ &\quad - \left\{ e^{\frac{iPx}{e^{-i\varphi}-1} - \frac{e^{iPy}}{e^{-i\varphi}-1}} - \frac{e^{iPy}}{e^{-i\varphi}-1} \right\} \\ &\quad \cdot \left. \left\{ e^{\frac{-iQx}{e^{i\varphi}-1} - \frac{e^{-iQy}}{e^{i\varphi}-1}} - \frac{e^{-iQy}}{e^{i\varphi}-1} \right\} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{2}{3}i(Q-P)\psi}}{(e^{i\bar{x}}-1)(e^{-i\bar{x}}-1)(e^{i\varphi}-1)(e^{-i\varphi}-1)(e^{i\bar{y}}-1)(e^{-i\bar{y}}-1)} \\ &\quad \cdot \left\{ \begin{aligned} &-(e^{i\bar{y}}-1)(e^{i\varphi}-1)(e^{-i\bar{x}}-1) e^{\frac{i(P-Q)x}{e^{i\varphi}-1} - \frac{i(Q+1)\varphi}{e^{i\varphi}-1}} \\ &-(e^{i\bar{y}}-1)(e^{-i\varphi}-1)(e^{-i\bar{x}}-1) e^{\frac{i(P-Q)x}{e^{-i\varphi}-1} - \frac{i(P+1)\varphi}{e^{-i\varphi}-1}} \\ &-(e^{i\bar{y}}-1)(e^{i\varphi}-1)(e^{-i\bar{x}}-1) e^{\frac{i(P+1)y}{e^{i\varphi}-1}} \\ &-(e^{i\bar{y}}-1)(e^{-i\varphi}-1)(e^{-i\bar{x}}-1) e^{\frac{-i(Q+1)y}{e^{-i\varphi}-1}} \\ &-(e^{i\bar{y}}-1)(e^{i\varphi}-1)(e^{-i\bar{x}}-1) e^{\frac{iPx}{e^{i\varphi}-1}} \\ &-(e^{i\bar{y}}-1)(e^{-i\varphi}-1)(e^{-i\bar{x}}-1) e^{\frac{-iQx}{e^{-i\varphi}-1}} \end{aligned} \right\} = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots = \frac{e^{\frac{2}{3}i(Q-P)\varphi}}{4^3 \sinh^2 \frac{x}{2} \sinh^2 \frac{\varphi}{2} \sinh^2 \frac{y}{2}} \\
& \cdot \left\{ \begin{aligned} & -2^3 i e^{i((P-Q)x + (Q+1)\varphi)} \sinh \frac{x}{2} \sinh \frac{\varphi}{2} \sinh \frac{y}{2} \\ & + 2^3 i e^{i((P-Q)x - (P+1)\varphi)} \sinh \frac{x}{2} \sinh \frac{\varphi}{2} \sinh \frac{y}{2} \\ & - 2^3 i e^{i(P+1)y} \cdot (-11-) \\ & + 2^3 i e^{-i(Q+1)y} \cdot (-11-) \\ & + 2^3 i e^{i(P+1)x} \cdot (-11-) \\ & - 2^3 i e^{-i(Q+1)x} \cdot (-11-) \end{aligned} \right\} \\
& = \chi_{(P,Q)}(\varphi, \psi) \quad , \quad \text{siehe Glg. (3.17)} ; \\
& \text{denn: } e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sinh z .
\end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Definition der Charaktere, Glgen. (2.4) bzw. (3.14), folgt sogleich eine Formel für die Dimension der $SU_c(3)$ -Darstellungen, denn es gilt:

$$(3.18) \quad \dim(P, Q) \equiv \text{Tr}_{(P,Q)} 1 = \chi_{(P,Q)}(0, 0) ,$$

d.h. man zählt auf diese Weise explizit die Anzahl von Zuständen in einem Multipllett. Mit $\chi_{(P,Q)}(\varphi, \psi)$ aus Glg. (3.17) findet man:

$$\begin{aligned}
(3.19) \quad \dim(P, Q) &= \lim_{\varphi, \psi \rightarrow 0} \chi_{(P,Q)}(\varphi, \psi) \\
&= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{4 \cdot \frac{\varphi}{4} \cdot \frac{\varphi}{2} \cdot (-\frac{\varphi}{4})} \left(\frac{-1}{3!} \right) \left(\frac{\varphi}{2} \right)^3 \left\{ (P+Q+2)^3 - (P+1)^3 - (Q+1)^3 \right\} \\
&= \frac{1}{2} (P+1)(Q+1)(P+Q+2) .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insbesondere für die Singlettdarstellung (entsprechend einem Tensor vom Rang 0):

$$(3.20) \quad d\bar{u}_m(0,0) = 1 \quad ,$$

und,

$$(3.21) \quad \chi_{(\varphi,0)}(\varphi,\psi) = \chi_{(\varphi,0)}^*(\varphi,\psi) = 1$$

$$(3.17) \quad = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{1}{2}(\psi + \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \frac{\varphi}{2}) \right)^{-1} \left(\sin \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \psi \right) .$$

Die Orthogonalitätsrelation der Charaktere.

Wie in Kapitel 2 gezeigt, fußt die gesamte Projektionsmethode wesentlich auf der Orthogonalitätsrelation für Gruppencharaktere, Glg.(2.6). Für die $SU_c(3)$ -Gruppe lautet sie wie folgt (zur Berechnung der Orthogonalitätsrelation mit den Charakteren gemäß Glg.(3.17) siehe die nach Glg.(3.23) folgende Zwischenrechnung):

$$(3.22) \quad \int_{SU_c(3)} d\varphi d\psi M(\varphi,\psi) \chi_{(p,q)}^*(\varphi,\psi) \chi_{(p',q')}(\varphi,\psi) \\ \equiv \frac{8}{3\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d(\frac{\varphi}{2}) d(\frac{\psi}{3}) \left(\sin \frac{1}{2}(\psi + \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \frac{\varphi}{2}) \right)^2 \chi_{(p,q)}^*(\varphi,\psi) \chi_{(p',q')}(\varphi,\psi) \\ = \delta_{pp'} \delta_{qq'} .$$

Die normierte und darstellungsunabhängige Maßfunktion ("Haar-Maß") erfüllt offensichtlich:

$$(3.23) \quad \int_{SU_c(3)} d\varphi d\psi M(\varphi,\psi) = 1 \\ \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d(\frac{\varphi}{2}) d(\frac{\psi}{3}) \frac{8}{3\pi^2} \left(\sin \frac{1}{2}(\psi + \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \frac{\varphi}{2}) \right)^2 .$$

Sie mißt gewissermaßen (darstellungsunabhängig) das Volumen des Parameterbereichs der $SU_c(3)$ -Cartan-Untergruppe.

Zwischenrechnung

Berechnung der Orthogonalitätsrelation, Glg.(3.22):

wegen Glg.(3.17) kann die Orthogonalitätsrelation auf die Orthogonalität trigonometrischer Funktionen zurückgeführt werden, wenn man die Maßfunktion so "wählt", daß sie die Nenner gemäß Glg.(3.17) beseitigt, und sie im Nachhinein normiert; man betrachtet:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O} &\equiv \int d\varphi d\psi \left(4 \sinh \frac{\varphi}{2} \left(\psi + \frac{\varphi}{2} \right) \sinh \frac{\varphi}{2} \sinh \frac{\varphi}{2} \left(\psi - \frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 \chi_{(P', Q')}^* \chi_{(P, Q)} \\
 &\hat{=} \int d\psi \int_{-\pi}^{\pi} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{2}{3}i(Q-Q'-P+P')\psi} \\
 &\quad \cdot \left\{ e^{\frac{i(P-P'-Q+Q')\psi}{\sinh(P+Q+2)\frac{\varphi}{2} \sinh(P'+Q'+2)\frac{\varphi}{2}}} \right. \\
 &\quad + e^{\frac{i(P-P')\psi}{\sinh(P+1)\frac{\varphi}{2} \sinh(P'+1)\frac{\varphi}{2}}} \\
 &\quad + e^{\frac{i(Q'-Q)\psi}{\sinh(Q+1)\frac{\varphi}{2} \sinh(Q'+1)\frac{\varphi}{2}}} \\
 &\quad \left. + \text{Terme, die keinen Beitrag zum} \right\} \\
 &\quad \quad \quad \text{Endergebnis liefern} \quad \quad \quad \left. \right\} ;
 \end{aligned}$$

dabei wurde der Bereich der φ -Integration so bestimmt, daß zunächst die folgende Beziehung anzuwenden ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sinh nx \sinh mx = \pi \cdot \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Man findet dann:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O} &\hat{=} \pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left\{ \delta_{P+Q, P'+Q'} e^{\frac{1}{3}i(P-Q-P'+Q')\psi} \right. \\
 &\quad + \delta_{PP'} e^{\frac{1}{3}i(P+2Q-P'-2Q')\psi} \\
 &\quad + \delta_{QQ'} e^{\frac{1}{3}i(2P'+Q'-2P-Q)\psi} \\
 &\quad \left. + \text{Terme, die keinen Beitrag zum} \right\} \\
 &\quad \quad \quad \text{Endergebnis liefern} \quad \quad \quad \left. \right\} .
 \end{aligned}$$

Die ψ -Integration kann dann ausgeführt werden, wenn man berücksichtigt, daß gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} = 2\pi \cdot \delta_{n0}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\hat{=} 2\pi^2 \cdot \left\{ \delta_{P+Q, P'+Q'} \delta_{P-Q, P'-Q'} + \delta_{PP'} \delta_{P+2Q, P'+2Q'} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{QQ'} \delta_{2P+Q, 2P'+Q'} \right\} \\ &= 6\pi^2 \cdot \delta_{PP'} \delta_{QQ'}. \end{aligned}$$

Q.e.d.

Man kann den in der obigen Zwischenrechnung gefundenen Parameterbereich (Integrationsgrenzen) für die Cartan-Untergruppe natürlich auch finden, indem man untersucht, wie φ und ψ variieren müssen, damit man ihre sämtlichen Elemente $\exp(i\varphi \hat{I}_3 + i\psi \hat{Y}_8)$ erfaßt: $-\pi \leq \frac{\varphi}{2}, \frac{\psi}{3} \leq \pi$.

Damit stehen die rein gruppentheoretischen Hilfsmittel zur Verfügung, die zur Anwendung der Projektionsmethode auf das Quark-Glue-Plasma benötigt werden. Im nächsten Abschnitt wird die außerdem notwendige generierende Funktion für Quarks und Gluonen bestimmt.

Die generierende Funktion für Quarks und Gluonen
bei endlicher Baryonenzahldichte.

Die für die allgemeine $SU(N)$ -Gruppe durch Glg.(2.8) gegebene generierende Funktion $\mathcal{Z}$ wird jetzt für ein System von näherungsweise freien Quarks und Gluonen mit innerer $SU_c(3)$ -Symmetrie berechnet:

$$\mathcal{Z}(T, V; \varphi, \psi) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}_0 + i\varphi \hat{I}_3 + i\psi \hat{Y}_8},$$

wobei $\hat{H}_0$ den dazugehörigen Hamilton-Operator bezeichnet und die Spur über alle (Vielteilchen-)Zustände des entsprechenden Hilbert-Raumes zu bilden ist. Bevor $\mathcal{Z}$ in der Besetzungszahldarstellung ausgewertet wird, führe ich aber

eine Verallgemeinerung des angegebenen Ausdrucks ein, die dann auf eine "gemischte" Zustandssumme führen wird: d.h. außer der exakten Beschreibung der Color-Singlettstruktur der physikalischen Zustände (kanonisch) soll die Baryonenzahlerhaltung für die Quarks im Mittel gewährleistet werden (großkanonisch) [27]:

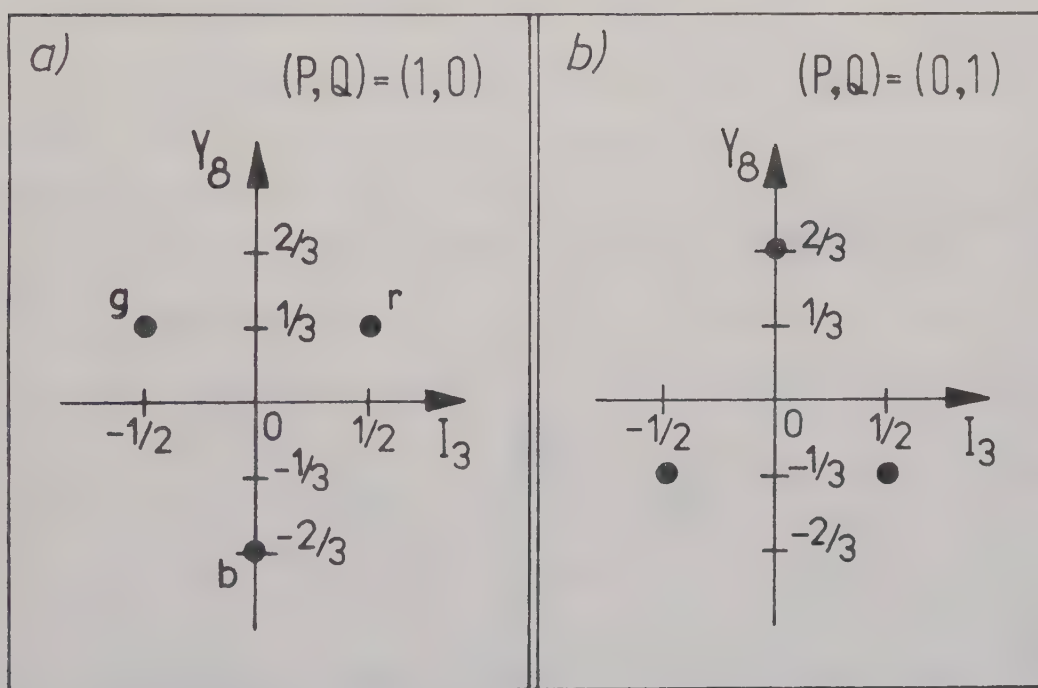
$$(3.24) \quad \tilde{Z}(T, V, \mu; \varphi, \psi) \equiv \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{A}) + i\varphi \hat{I}_3 + i\psi \hat{Y}_8}.$$

Die Verallgemeinerung besteht also in der Berücksichtigung einer weiteren inneren $U_A(1)$ -Symmetrie der Zustände, wobei hier im Gegensatz zu dem Beispiel der $U_A(1) \times SU_c(2)$ -Symmetrie in Kapitel 2.2 (S.34ff) die baryonische Ladung großkanonisch behandelt wird; in der Definition von $\tilde{Z}$ in Glg.(3.24) wurde daher das chemische Potential μ in Verbindung mit dem Baryonenzahloperator $\hat{A}$ eingeführt.

Die großkanonische Betrachtungsweise der Baryonenladung wird aus zweierlei Gründen gewählt: einerseits um zu zeigen, daß die Projektionsmethode auch in dieser Richtung sinnvoll verallgemeinert und der Begriff einer gemischt kanonisch-großkanonischen Zustandssumme definiert werden kann. Andererseits in Hinblick auf die physikalischen Bedingungen unter denen ggf. ein Quark-Glue-Plasma beobachtet werden kann, daß nämlich diese neue Phase der Materie zumeist von einer mehr oder minder dichten Zone hadronischer Materie umgeben sein wird, da sie selbst nicht absolut stabil ist und daher eine Phasengrenze auftritt, durch die hindurch etwa elektrische, baryonische etc. Ladungen ausgetauscht werden können: es besteht dann gewissermaßen ein Reservoir für diese Ladungen (im Gegensatz zur "Farbe"). Das trifft sowohl auf das Innere von Quarksternen zu [28], als auch auf den (Plasma-)Keimbildungsprozeß in einem zentralen hochenergetischen Schwerionenkollision [29].

Betrachtet werden jetzt drei "farbige" Quarks ("rot", "grün", "blau"), d.h. es wird angenommen, daß sich die Wellenfunktion eines Quarks unter Eichtransformationen wie

die fundamentale Triplettdarstellung $(1,0)$ der $SU_C(3)$ -Gruppe verhält (vgl. Glg.(3.19)) bzw. als Tensor $\{A_j, j=1,2,3\}$ dargestellt werden kann. Die Antiquarks sind dann definiert als weiteres Trippel von Teilchen, bei denen alle additiven Ladungen denjenigen der Quarks gleich sind, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen; das entspricht der Antitriplettdarstellung $(0,1)$ bzw. einem Tensor $\{B_j, j=1,2,3\}$. Aus den Glgen.(3.12) bzw. (3.13) liest man die "Farbladungen" der Quarks und Antiquarks als die Eigenwerte zu $\hat{I}_3$ bzw. $\hat{Y}_8$ ab - z.B. $I_3(A_1) = 1/2$, $Y_8(B^3) = -1/3 + 1 = 2/3$. Sie sind in Fig.4 in Form sogenannter Gewichtsdiagramme dargestellt.

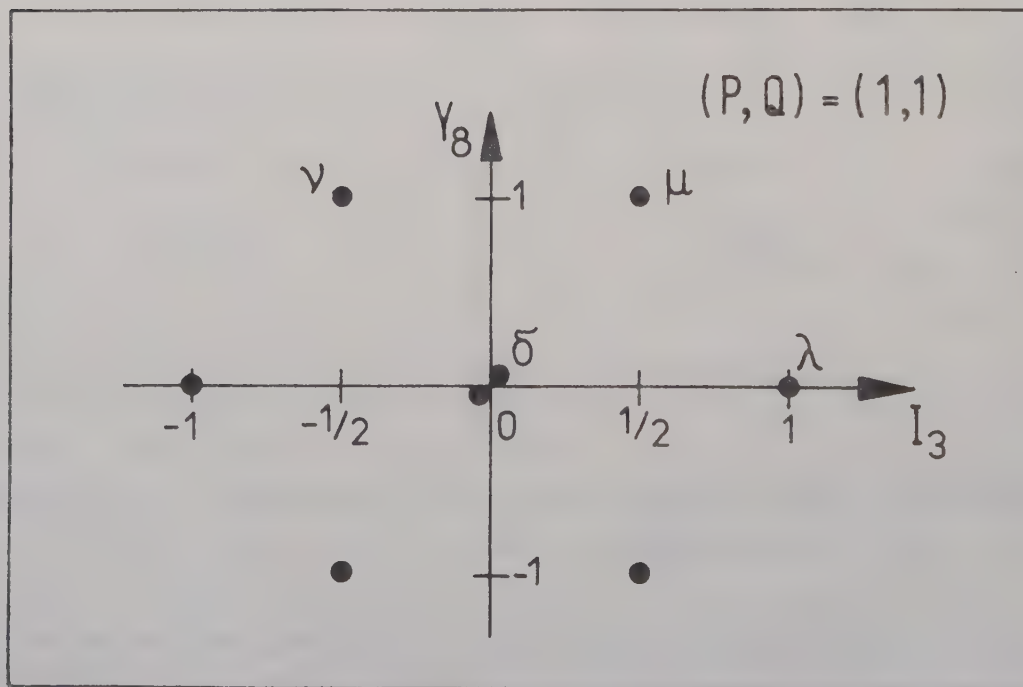


UFfmTP 83 - 370

Fig.4 Die Gewichtsdiagramme ("Farbladungen") für a) Quarks und b) Antiquarks

Die Gluonen wechselwirken in der $SU_C(3)$ -Eichtheorie durch die minimale Kopplung mit den Quarks, außerdem bedingt die lokale Eichinvarianz hierbei (im Unterschied zur QED), daß sie ebenfalls geladen sein und mit sich wechselwirken müssen [2]. Daher können wegen der Ladungserhaltung ihre Farbladungen durch Kombination von Quark- und Antiquark-

ladungen bestimmt werden. Man erhält so die Darstellung der Gluonen durch einen Tensor $\{C_i^j \equiv A_i B^j, i, j = 1, 2, 3\}$, der allerdings neun Elemente enthält, wohingegen die irreduzible $(1, 1)$ -Darstellung nach Glg.(3.19) 8-dimensional sein muß. Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man beachtet, daß die Spur des Tensors C , $S \equiv C_i^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$ nicht verschwindet, und deshalb der Tensor C in ein irreduzibles Oktett und ein (skalares) Singlett zerlegt werden kann. Es gilt also die folgende Regel für die Verknüpfung der betrachteten Multipletts: $(1, 0) \otimes (0, 1) = (0, 0) \oplus (1, 1)$. Damit ergibt sich schließlich das Gewichtsdiagramm für die Gluonen in Fig.5 durch komponentenweise Addition der Farbladungen von jeweils einem Quark und einem Antiquark; ein Zustand mit den Eigenwerten $(I_3, Y_8) = (0, 0)$ wird mit dem Singlett identifiziert und weggelassen. Selbstverständlich kann man die Ladungen auch wieder als Eigenwerte zu Color-Isospin und -Hyperladung, Glgen.(3.12,13), für einen irreduziblen Tensor mit einem ko- und einem kontravarianten Index erhalten.



UFfm TP83-371

Fig.5 Das Gewichtsdiagramm für Gluonen

Die generierende Funktion $\mathcal{Z}$ für Quarks mit Spin $s=1/2$ (Fermionen) und Gluonen mit $s=1$ (Bosonen) wird jetzt in der Besetzungszahldarstellung berechnet. Für freie Teilchen gilt zunächst gemäß Glg.(3.24) (vgl. auch Kap.1.1, Glgen.(1.6-8)):

$$(3.25) \quad \mathcal{Z} = \prod_{i=r,g,b} \mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(i)} \prod_{j=\lambda,\mu,\nu,\delta} \mathcal{Z}_{\text{Gluon}}^{(j)},$$

d.h. $\mathcal{Z}$ zerfällt in ein Produkt von generierenden Funktionen zu jeder Quarkfarbe (siehe Fig.4) und jeder Gluekomponente (siehe Fig.5), da der Gesamtzustandsraum des Systems in die entsprechenden Teilräume zerfällt. Es finden sich jeweils Paare von (Anti-)Teilchen mit entgegengesetzt gleichen Ladungen, deshalb erhält man:

$$(3.26) \quad \mathcal{Z}_{\text{Gluon}}^{(j)} \equiv \sum_{\{n_K\}} e^{\sum_K (-\beta \epsilon'_K + i \alpha_{(j)}) n_K}. \quad (\text{c.c.}),$$

und

$$(3.27) \quad \mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(i)} \equiv \sum_{\{n_K\}} e^{\sum_K (-\beta(\epsilon_K - \mu_q) + i \alpha_{(i)}) n_K} \sum_{\{n_{\bar{K}}\}} e^{\sum_{\bar{K}} (-\beta(\epsilon_{\bar{K}} + \mu_q) - i \alpha_{(i)}) n_{\bar{K}}},$$

wobei mit ϵ_K, ϵ'_K die Einteilchenenergieniveaus bezeichnet sind und über sämtliche mit der jeweiligen Statistik verträglichen Verteilungen von Besetzungszahlen zu summieren ist. Es sei hier angemerkt, daß wegen des reellen chemischen Potentials μ_q für die Quarkzahl der Beitrag der Antiquarks explizit hingeschrieben wurde, während der Beitrag derjenigen Gluonen, deren Ladungen sich von $\lambda, \mu, \nu, \delta$ jeweils lediglich durch das Vorzeichen unterscheiden, als der konjugiert komplexe Faktor ("c.c.") in $\mathcal{Z}_{\text{Gluon}}$ erscheint (vgl. Bem. nach Glg.(1.3)). - Da jedes (Anti-)Quark die baryonische Ladung $a = \pm 1/3$ trägt, gilt bezüglich der Baryonenzahl A der Zusammenhang:

$$(3.28) \quad \mu A = \frac{1}{3} \sum_K (n_K - n_{\bar{K}}) \equiv \mu_q \sum_K (n_K - n_{\bar{K}}),$$

für jede Quarkfarbe. - Die verschiedenen Winkel $\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}$, die in Glgen.(3.26,27) der Kürze halber benutzt werden, sind definiert als Linearkombinationen der Winkel φ und

Ψ , wie sie sich aus Glg.(3.24) durch Einsetzen der Farbladungen der einzelnen Teilchen für die Eigenwerte der Operatoren $\hat{I}_3, \hat{Y}_8$ ergeben (siehe Fig.4a),5):

$$(3.29) \quad \alpha_r \equiv \frac{q}{2} + \frac{\psi}{3}, \quad \alpha_\lambda \equiv \alpha_r - \alpha_g, \\ \alpha_g \equiv -\frac{q}{2} + \frac{\psi}{3}, \quad \alpha_u \equiv \alpha_r - \alpha_b, \\ \alpha_b \equiv -2\frac{\psi}{3}, \quad \alpha_v \equiv \alpha_g - \alpha_b, \quad \alpha_\delta \equiv \sigma.$$

Jetzt kann man die in Kapitel 1, Glgen.(1.3-4,7), für eine U(1)-Ladung durchgeführte Rechnung einfach für jede einzelne Komponente des Quark-Glue-Systems getrennt wiederholen; die wesentlichen Schritte sind hier:

$$(3.30) \quad \tilde{Z}_{\text{Glue}}^{(j)} = \prod_k \left(1 - e^{-\beta \epsilon_k' + i\alpha_{ij}}\right)^{-1} \cdot (\text{c.c.}) \\ \left. \begin{array}{l} \\ h_k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \\ = \exp - \sum_k \left\{ \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k' + i\alpha_{ij}}) + \text{c.c.} \right\} \\ = \exp 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \tilde{Z}_1^{\text{Glue}}(h\beta, V) \cos h\alpha_{ij},$$

und:

$$(3.31) \quad \tilde{Z}_{\text{Quark}}^{(j)} = \prod_k \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu_q) + i\alpha_{ij}}\right) \cdot \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_k + \mu_q) - i\alpha_{ij}}\right) \\ \left. \begin{array}{l} \\ h_k, h_{\bar{k}} = 0, 1 \end{array} \right\} \\ = \exp \sum_k \left\{ \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu_q) + i\alpha_{ij}}) + \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_k + \mu_q) - i\alpha_{ij}}) \right\} \\ = \exp 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \tilde{Z}_1^{\text{Quark}}(h\beta, V) \cos h(\alpha_{ij} - i\beta\mu_q),$$

mit den Einteilchenzustandssummen $\tilde{Z}_1^{\text{Quark(Glue)}} \equiv \sum_k e^{-\beta \epsilon_k^{(j)}}$.

Die so erhaltenen Ausdrücke werden im nächsten Kapitel weiter ausgewertet.

Die generierende Funktion $\tilde{Z}$ für das Quark-Glue-Plasma ist durch die Glgen.(3.25,30,31) weitgehend bestimmt, und die

weitergehende Untersuchung hängt jetzt neben der Ausführung der Gruppenintegrale über die Projektionswinkel im Sinne von Glq.(2.7) hauptsächlich von Annahmen über die Einteilchenenergieniveaus ϵ_k, ϵ'_k ab.

Abschließend sei an dieser Stelle zweierlei bemerkt:

i) Die generierende Funktion $\mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(u)}$ und damit $\mathcal{Z}$ ist bei endlichem μ_q nicht reell; es muß daher noch gezeigt werden (Kap.3.2), daß die Projektionsmethode tatsächlich eine reelle Zustandssumme für ein farbloses Quark-Glue-Plasma liefert.

ii) Ausgehend von den Glgen.(3.30,31) läßt sich der Quark- bzw. Glue-Anteil der generierenden Funktion auch folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
 & \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \mathcal{Z}_1^{\text{Quark}}(\mu\beta, V) \sum_{i=r,g,b} \left(e^{h(\beta\mu_q + i\alpha_{(i)})} + e^{-h(\beta\mu_q + i\alpha_{(i)})} \right) \\
 &= \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \mathcal{Z}_1^{\text{Quark}}(\mu\beta, V) \left\{ e^{h\beta\mu_q} \text{Tr}_{(1,0)} + e^{-h\beta\mu_q} \text{Tr}_{(0,1)} \right\} e^{i h (\varphi \hat{I}_3 + \psi \hat{Y}_8)} \\
 (3.14) \quad & \equiv \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \mathcal{Z}_1^{\text{Quark}}(\mu\beta, V) \left\{ e^{h\beta\mu_q} \chi_{(1,0)}(\mu\varphi, \mu\psi) + e^{-h\beta\mu_q} \chi_{(0,1)}(\mu\varphi, \mu\psi) \right\},
 \end{aligned}$$

bzw. erhält man für die Gluonen:

$$\begin{aligned}
 & \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \mathcal{Z}_1^{\text{Glue}}(\mu\beta, V) \sum_{j=\lambda, \mu, \nu, \delta} \left(e^{i h \alpha_{(j)}} + e^{-i h \alpha_{(j)}} \right) \\
 &= \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \mathcal{Z}_1^{\text{Glue}}(\mu\beta, V) \text{Tr}_{(1,1)} e^{i h (\varphi \hat{I}_3 + \psi \hat{Y}_8)} \\
 (3.14) \quad & \equiv \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \mathcal{Z}_1^{\text{Glue}}(\mu\beta, V) \chi_{(1,1)}(\mu\varphi, \mu\psi).
 \end{aligned}$$

Integranden von der Form können bei Integration über die $SU_c(3)$ -(Cartan-Unter-)Gruppe (wegen des Zusammenhangs mit der Projektionsmethode vgl.Kap.3.2) als Ausgangspunkt für eine gruppentheoretische Analyse der Integrale dienen; etwas einfachere, sogenannte "one-link"-Integrale treten bei der Untersuchung von Gittereichtheorien auf, sie können bisher nicht geschlossen analytisch berechnet werden (eine neuere Arbeit und weitere Referenzen finden sich in [30]).

Physikalische Interpretation der generierenden Funktion.

Die im Fall der $SU_c(3)$ -Symmetrie durch Glg.(3.24) gegebene generierende Funktion $\mathcal{Z}$ (vgl.i.A. Glg.(2.8)) hat eine einfache physikalische Bedeutung, die ich im Folgenden aufzeigen werde [27]. Sei o.B.d.A. $\mu=\sigma$, dann geht es im Wesentlichen darum, die den Winkeln φ und ψ proportionalen Terme im Exponenten in Glg.(3.24) zu verstehen bzw. die folgenden Operatoren:

$$(3.32) \quad \hat{H}^{Gluon} \equiv \hat{H}_0^G - i \frac{\varphi}{\beta} \hat{I}_3^G - i \frac{\psi}{\beta} \hat{Y}_8^G ,$$

$$(3.33) \quad \hat{H}^{Quark} \equiv \hat{H}_0^Q - i \frac{\varphi}{\beta} \hat{I}_3^Q - i \frac{\psi}{\beta} \hat{Y}_8^Q ,$$

wobei mit den Indices G(lue), Q(uark) gemeint ist, daß die betreffenden Operatoren nur auf die dementsprechenden Quanten wirken; mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

$$(3.34) \quad \mathcal{Z}(T, \varphi, \psi) = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}^{Gluon} + \hat{H}^{Quark})} .$$

D.h., wenn es gelingt, die neben den ungestörten Hamilton-Operatoren $\hat{H}_0^{G,Q}$ in den Glgen.(3.32,33) auftretenden Terme als Wechselwirkungen zu interpretieren, dann ist $\mathcal{Z}$ wegen Glg.(3.34) als gewöhnliche Zustandssumme für Quarks und Gluonen mit eben diesen Wechselwirkungen anzusehen.

Dazu werde für den komplizierteren Fall der Gluonen die klassische, in Analogie zur Elektrodynamik eichinvariant konstruierte Lagrange-(Dichte-)Funktion betrachtet [2]:

$$(3.35) \quad \mathcal{L}_{Gluon} \equiv -\frac{1}{4} \overbrace{\overline{F}_{a\mu\nu} \overline{F}_a^{\mu\nu}}^{\text{Color-u.}}, a=1,\dots,8, \mu,\nu=0,1,2,3,$$

(über doppelt vorkommende Viererindizes wird summiert und die Metrik sei $g_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$), wobei die Feldstärken $\overline{F}_a^{\mu\nu}$ mit Potentialen A_a^μ verknüpft sind durch:

$$(3.36) \quad \overline{F}_a^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu ;$$

mit f_{abc} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der $SU_c(3)$ -Lie-Algebra bezeichnet (vgl. Glgen. (3.10)):

$$(3.37) \quad [\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c.$$

Die nicht-verschwindenden Elemente f_{abc} lauten [25]:

$$(3.38) \quad \begin{array}{cc} a & b & c & f_{abc} \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1/2 \\ 1 & 5 & 6 & -1/2 \\ 2 & 4 & 6 & 1/2 \\ 2 & 5 & 7 & 1/2 \\ 3 & 4 & 5 & 1/2 \\ 3 & 6 & 7 & -1/2 \\ 4 & 5 & 8 & \sqrt{3}/2 \\ 6 & 7 & 8 & \sqrt{3}/2 \end{array}$$

Wenn man die Kopplungskonstante $g=0$ setzt, so fällt der Selbstwechselwirkungsterm in Glg. (3.36) weg. Die Lagrange-Funktion, Glg. (3.35), zerfällt in die Summe von acht Termen, die dieselbe Struktur wie in der Elektrodynamik besitzen. Dann gilt ferner:

$$(3.39) \quad \mathcal{L}_{Glu}^{g=0} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{mn= \\ 12, 45, 67}} G_{mn}^{*\mu\nu} G_{mn}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{a= \\ 3, 8}} F_{a\mu\nu}^{\sigma} F_a^{\sigma\mu\nu},$$

wobei G^* konjugiert komplex zu G ist, und:

$$(3.40) \quad G_{mn}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu L_{mn}^\nu - \partial^\nu L_{mn}^\mu, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

mit,

$$(3.41) \quad L_{12}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^\mu + i A_2^\mu), \quad L_{45}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_4^\mu + i A_5^\mu),$$

$$L_{67}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_6^\mu + i A_7^\mu), \quad F_{a\mu\nu}^\sigma \equiv \partial_\mu A_{\nu}^\sigma - \partial_\nu A_{\mu}^\sigma.$$

Die Lagrange-Funktion läßt sich also auf diese Weise umschreiben in die Summe von zwei photonenartigen Termen ($\sim F_3^2, F_8^2$) plus den Beiträgen von drei komplexen/geladenen

Vektorfeldern ($\sim |G_{mn}|^2$). Man kann von daher vermuten, daß die wechselwirkende Theorie ($g \neq 0$) gewisse Terme enthält, die die Wechselwirkung der zu G_{mn} gehörenden Ströme mit (äußeren) Potentialen beschreiben. Eine sehr einfache Möglichkeit findet man in dem Fall, wenn die zu den "Photonenfeldern" gehörigen Potentiale A_3, A_8 einen konstanten "Vakuumannteil" $\bar{A}$ besitzen; insbesondere werde A wie folgt ersetzt:

$$(3.42) \quad A_a^\mu \longrightarrow A_a^\mu + \bar{A}_a^\mu, \\ \bar{A}_a^\mu \equiv \delta_{a3} \bar{A}_{3\mu} + \delta_{a8} \bar{A}_{8\mu}, \quad \bar{A}_{3\mu}, \bar{A}_{8\mu} = \text{const};$$

für ein solches Potential $\bar{A}$ verschwinden die Feldstärken in Glg.(3.36), daher heißt es ein Vakuumpotential.

$\mathcal{L}_{\text{dine}}$, Glg.(3.35), wird jetzt mit Glg.(3.42) zu $\mathcal{L}'$:

$$(3.43) \quad \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g f_{abc} (A_\mu + \bar{A}_\mu) (A_\nu + \bar{A}_\nu) \right) \\ \cdot \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + g f_{abc} (A^\mu + \bar{A}^\mu) (A^\nu + \bar{A}^\nu) \right).$$

Da das Vakuumpotential nur Komponenten in die 3,8-Richtungen im Farbraum besitzen soll, und mit (3.38),

$$f_{K38} = f_{K33} = f_{K88} = 0,$$

so erhält man:

$$(3.44) \quad \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\sigma F_a^{\sigma\mu\nu} - g f_{abc} F_{\mu\nu}^\sigma A_b^\mu A_c^\nu \\ - \frac{1}{2} g^2 f_{abc} f_{ade} (A_{b\mu} \bar{A}_{c\nu} A_d^\mu A_e^\nu + A_{b\mu} \bar{A}_{c\nu} A_d^\nu A_e^\mu);$$

es wurden nur diejenigen Terme berücksichtigt, die höchstens quadratisch in A sind. Ersetzt man wieder die Felder gemäß Glg.(3.40) bzw. (3.41) durch komplexe Felder, dann ergibt sich anstelle von Glg.(3.39) ($g=0$) für die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}'$ ($g \neq 0$) aus Glg.(3.44) - wenn man berücksichtigt, daß $\bar{A}$ lediglich 3,8-Komponenten besitzt, und daß wegen (3.38) gilt:

$$\left. \begin{aligned} f_{mn3} f_{mn'3} &= f_{mn3} f_{mn3} \delta_{nn'} \\ f_{mn8} f_{mn'8} &= f_{mn8} f_{mn8} \delta_{nn'} \\ f_{mn3} f_{mn'8} &= f_{mn3} f_{mn8} \delta_{nn'} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{keine} \\ \text{Summation} \\ \text{in dopp.} \\ \text{vork. Indices,} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (3.45) \quad \mathcal{L}' = & -\frac{1}{4} \sum_{a=3,8} F_{\alpha\mu\nu}^0 F^{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{mn=12,45,67} G_{mn\mu\nu}^* G^{\mu\nu}_{mn} \\
 & + i g \sum_{a=3,8} f_{mna} (G_{mn\mu\nu}^* W^\mu - G_{mn\mu\nu} W^{*\mu}) A_a^\nu \\
 & - g^2 \sum_{a=3,8} f_{mna} f_{mbc} (W_{mn}^{*\mu} W_{ab}^\mu A_c^\nu - W_{mn}^{*\mu} W_{bc}^\mu A_a^\nu) .
 \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion läßt sich also unter vereinfachenden Annahmen darstellen als Summe von Termen, die zwei freien Photonenfeldern A_3, A_8 entsprechen plus drei geladenen Vektorfeldern W_{12}, W_{45}, W_{67} , die mit einem äußeren Potential A wechselwirken.

Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}'$, Glg.(3.45), läßt sich auch aus der freien Lagrange-Funktion, Glg.(3.39), durch eine minimale Ankopplung des äußeren Potentials an die geladenen Felder gewinnen, indem man die Ableitungen in den Feldstärken, Glg.(3.40), durch kovariante Ableitungen ersetzt:

$$(3.46) \quad \partial^\mu \longrightarrow D_{mn}^\mu \equiv \partial^\mu + i g \sum_{a=3,8} f_{mna} A_a^\mu ,$$

bzw. in G^* :

$$\partial^\mu \longrightarrow D_{mn}^{*\mu} \equiv \partial^\mu - i g \sum_{a=3,8} f_{mna} A_a^\mu .$$

Sei $\tilde{G}^{(*)}$ definiert durch:

$$(3.47) \quad \tilde{G}_{mn}^{(*)\mu\nu} \equiv D_{mn}^{(*)\mu} W_{mn}^{(*)\nu} - D_{mn}^{(*)\nu} W_{mn}^{(*)\mu} \quad (\text{o. Symm.}) ,$$

dann gilt also:

$$(3.48) \quad \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} \sum_{a=3,8} F_{\alpha\mu\nu}^0 F^{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{mn=12,45,67} \tilde{G}_{mn\mu\nu}^* \tilde{G}^{\mu\nu}_{mn} .$$

Durch Variation der zu $\mathcal{L}'$ gehörigen Wirkung nach den $W^{(*)}$ -Feldern und ihren Ableitungen erhält man die den Maxwell-Gleichungen analogen (Euler-Lagrange-)Feldgleichungen; z.B. folgt mit Glg.(3.48):

$$(3.49) \quad \sigma = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial W_{mn}^{*\lambda}} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial^\mu W_{mn}^{*\lambda}} = \dots$$

$$(3.49) \quad \dots = -\frac{1}{2} \left\{ (-ig \sum_{a=3,8} f_{mna} A_a^\mu) (\bar{\psi}_{mnp} - \bar{\psi}_{mnp}) - \partial^\mu (\bar{\psi}_{mnp} - \bar{\psi}_{mnp}) \right\} \\ = D_{mn}^\mu \bar{\psi}_{mnp}.$$

Genauso findet man:

$$(3.50) \quad \theta = D_{mn}^{*\mu} \psi_{mnp}^*.$$

An dieser Stelle muß man die Konsistenz der Feldgleichungen prüfen [31]; aus Glg.(3.49) ergibt sich beispielsweise, wenn man die kovariante Ableitung explizit einsetzt:

$$\partial^\mu \bar{\psi}_{mnp} = -ig \sum_{a=3,8} f_{mna} A_a^\mu \bar{\psi}_{mnp},$$

und es gilt:

$$\partial^\mu \partial^\nu \bar{\psi}_{mnp} = 0, \text{ wegen } \bar{\psi}_{mnp} = \bar{\psi}_{mnp} e^{(-1)}(x);$$

also muß man nachrechnen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{?!}{=} \sum_a f_{mna} A_a^\mu \partial^\nu \bar{\psi}_{mnp} \\ &= \sum_a f_{mna} A_a^\mu (D_{mn}^\nu - ig \sum_b f_{mnb} A_b^\nu) \bar{\psi}_{mnp} \\ &\stackrel{(3.49)}{=} -ig \sum_{a,b=3,8} f_{mna} f_{mnb} A_a^\mu A_b^\nu \bar{\psi}_{mnp} \stackrel{(x)}{=} 0, \text{ d.e.d.} \end{aligned}$$

Die Analogie zur Elektrodynamik legt es nahe, die Wechselwirkungsterme in der Form $\bar{J} \cdot A$ zu schreiben, wobei $\bar{J}$ ein erhaltener Viererstrom sein soll. Dann berechnet man mit Hilfe der Glgen.(3.46-48):

$$(3.51) \quad \bar{J}_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_a^\mu} \equiv \sum_{mn} \bar{J}_{\mu mn} \\ = -\frac{1}{2} \sum_{mn} \left\{ -ig f_{mna} \psi_{mn}^{*v} (\bar{\psi}_{mnp} - \bar{\psi}_{mnp}) + \text{c.c.} \right\} \\ = -ig \sum_{\substack{mn= \\ 12,45,67}} f_{mna} (\bar{\psi}_{mnp}^* \psi_{mn}^v - \bar{\psi}_{mnp} \psi_{mn}^{*v}).$$

Wegen der Feldgleichungen, Glgen.(3.49,50), und wegen der folgenden Identitäten,

$$\partial_\mu (\alpha \beta) = (D_\mu^* \alpha) \beta + \alpha D_\mu \beta = (D_\mu \alpha) \beta + \alpha D_\mu^* \beta \quad (0),$$

gilt tatsächlich für die Divergenz der in Glg.(3.51) definierten Komponenten des Farbstroms:

$$\begin{aligned}
 (3.52) \quad \partial^\mu j_{a\mu\nu} &\equiv ig f_{abc} \partial^\mu \left\{ \bar{\psi}_{b\nu\mu} \psi^{*c\nu} - \bar{\psi}_{b\mu\nu} \psi^{*c\mu} \right\} \\
 &\stackrel{(3.47)}{=} ig f_{abc} \left\{ (D_{b\nu\mu}^\mu \bar{\psi}_{b\nu\mu}) \psi^{*c\nu} + \bar{\psi}_{b\mu\nu} D_{b\mu\nu}^{*\mu} \psi^{*c\mu} \right. \\
 &\quad \left. - (D_{b\mu\nu}^{*\mu} \bar{\psi}_{b\mu\nu}) \psi^{*c\mu} - \bar{\psi}_{b\nu\mu} D_{b\nu\mu}^\mu \psi^{*c\mu} \right\} \\
 &\stackrel{(3.47)}{=} ig f_{abc} \left\{ (D_{b\nu\mu}^\mu \bar{\psi}_{b\nu\mu} - D_{b\mu\nu}^\mu \bar{\psi}_{b\mu\nu}) D_{b\mu\nu}^{*\mu} \psi^{*c\mu} \right. \\
 &\quad \left. - (D_{b\mu\nu}^{*\mu} \bar{\psi}_{b\mu\nu} - D_{b\nu\mu}^{*\mu} \bar{\psi}_{b\nu\mu}) D_{b\mu\nu}^\mu \psi^{*c\mu} \right\} \\
 &= 0, \text{ a.z.d.}
 \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion, Glgen.(3.45,48), kann also auch geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
 (3.53) \quad \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4} \sum_{a=3,8} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{b=c=12,45,67}} G_{\mu\nu}^{*b} G^{\mu\nu b} \\
 &\quad + \sum_{a=3,8} \sum_{\substack{b=c=12,45,67}} j_{a\mu\nu} A^{\mu a} .
 \end{aligned}$$

Man beobachtet hier insbesondere, daß der zu den drei geladenen Vektorfeldern gehörige Teil von $\mathcal{L}'(g \neq 0)$ in drei gleiche Teile zerfällt ($mn=12,45,67$). Wegen der in die Definition der Farbströme eingehenden Strukturkonstanten werden sich die entsprechenden Quanten lediglich in der Ladung unterscheiden, mit der sie an die beiden (konstanten) äußeren Potentiale $\bar{A}_3, \bar{A}_8$ koppeln. Hierin ist noch eine Spur der ursprünglichen Yang-Mills-Theorie zu sehen, die im Wesentlichen unter Vernachlässigung der Selbstwechselwirkung der Gluonen bis hin zur Glg.(3.53) vereinfacht werden konnte.

Die Quantisierung der Photonenfelder A_3, A_8 erfolgt wie in der QED [32] und soll nicht weiter ausgeführt werden, da es sich um einen Spezialfall ($g=0$) der nachfolgenden Überlegungen handelt. - Betrachtet wird jetzt stellvertretend

für alle drei geladenen Vektorfelder der zu einem einzigen gehörige Teil der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}'$:

$$(3.54) \quad \mathcal{L} \equiv -\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} + \sum_{a=1}^3 j_a^\mu A_\mu^a = -\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu},$$

(die fest gewählten Indices $\mu\nu$ werden weggelassen).

Um die entsprechende Hamilton-Funktion zu finden, berechnet man zunächst die zu den "Koordinaten" $\dot{W}_\mu, \dot{W}_\mu^*$ kanonisch konjugierten Impulse π_μ, π_μ^* :

$$(3.55) \quad \pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{W}^\mu} = -G_{0\mu}^*, \quad \pi_\mu^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{W}^{*\mu}} = -G_{0\mu}.$$

Die Hamilton-(Dichte-)Funktion ist dann:

$$(3.56) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \pi_\mu \dot{W}^\mu + \pi_\mu^* \dot{W}^{*\mu} - \mathcal{L} \\ &\stackrel{(3.54)}{=} \pi_\mu \dot{W}^\mu + \pi_\mu^* \dot{W}^{*\mu} + G_{0\nu}^* G^{0\nu} + \frac{1}{2} G_{ij}^* G^{ij} \\ &\stackrel{(3.55)}{=} \pi_\mu \dot{W}^\mu + \pi_\mu^* \dot{W}^{*\mu} + \pi_\mu^* \pi^\mu + \frac{1}{2} G_{ij}^* G^{ij}. \end{aligned}$$

Es gilt wegen der Gln.(3.46,47):

$$\begin{aligned} \dot{W}^\mu &= D^\mu W^\mu - ig \sum_a t_a A_a^\mu W^\mu \\ &= G^{0\mu} + D^\mu W^0 - ig \sum_a t_a A_a^\mu W^\mu \\ &\stackrel{(3.55)}{=} -\pi^{*\mu} + D^\mu W^0 - ig \sum_a t_a A_a^\mu W^\mu, \end{aligned}$$

und analog:

$$\dot{W}^{*\mu} = -\pi^\mu + D^{*\mu} W^{*0} + ig \sum_a t_a A_a^\mu W^{*\mu}.$$

Also ergibt sich:

$$(3.57) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &= -\pi_\mu^* \pi^\mu + \frac{1}{2} G_{ij}^* G^{ij} \\ &\quad + \left\{ \pi_\mu (D^\mu W^0 - ig \sum_a t_a A_a^\mu W^\mu) + \text{c.c.} \right\} \\ &= \pi_j^* \pi_j + \frac{1}{2} G_{ij}^* G_{ij} - \pi_j (D_j W^0 - ig \sum_a t_a A_a^0 W_j) \\ &\quad - \pi_j^* (D_j^* W^{*0} + ig \sum_a t_a A_a^0 W_j^*), \end{aligned}$$

denn $\pi_0 = \pi_0^* = 0$ (gemäß Glg.(3.55): $G_{\mu\nu}^* = -G_{\nu\mu}$);

zu $\vec{W}_0, \vec{W}_0^*$ existieren also keine kanonisch konjugierten Impulse, weshalb diese Feldkomponenten nicht als unabhängige dynamische Freiheitsgrade anzusehen sind.

Die freien Felder werden analog zur Elektrodynamik quantisiert. Dazu wird gefordert, daß die freien masselosen $\vec{W}, \vec{W}^*$ -Felder - bzw. auch die ursprünglichen Gluonenfelder gemäß Glgen.(3.41) - transversal sind und einer Eichbedingung genügen:

$$(3.58) \quad \nabla \cdot \vec{W} = \nabla \cdot \vec{W}^* = 0,$$

$$\vec{W}_0 = \vec{W}_0^* = 0 \quad (\text{"Strahlungseichung"})$$

Damit werden die Feldgleichungen, Glgen.(3.49,50), zu den Wellengleichungen ($q=0$):

$$(3.59) \quad \partial_\mu \partial^\mu \vec{W} = \partial_\mu \partial^\mu \vec{W}^* = 0.$$

Man kann dann die Felder nach ebenen Wellen als Lösungen der Glgen.(3.59) entwickeln [32]:

$$(3.60) \quad \begin{aligned} \vec{W}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left\{ a_+(\vec{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x} + a_-^*(\vec{k}, \lambda) e^{ik \cdot x} \right\}, \\ \vec{W}^*(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left\{ a_+^*(\vec{k}, \lambda) e^{ik \cdot x} + a_-(\vec{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x} \right\}, \end{aligned}$$

$k \cdot x \equiv k_\mu x^\mu.$

wobei im Unterschied zur QED die Amplituden a_- , a_+ voneinander unabhängig sind, da die Felder hier durch komplexwertige Funktionen beschrieben werden. Die Einheitsvektoren $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ legen die Polarisierung der ebenen Wellen fest; damit die Transversalität gegeben ist, muß nach Glg.(3.58) gelten:

$$(3.61) \quad \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{k} = 0, \quad \text{für alle } \vec{k} \text{ u. } \lambda = 1, 2.$$

Außerdem gelte:

$$(3.62) \quad \begin{aligned} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(-\vec{k}, \lambda') &= (-1)^\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \end{aligned}$$

so daß also $\vec{e}_1 \equiv \vec{e}(\vec{k}, 1)$, $\vec{e}_2 \equiv \vec{e}(\vec{k}, 2)$, $\vec{e}_3 \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$ ein dreidimensionales, rechtshändiges Orthonormalsystem bilden. Damit die ebenen Wellen bzw. auch die Felder gemäß Glgen.(3.60) die freien Feldgleichungen, Glgen.(3.59), erfüllen, muß weiterhin gelten:

$$(3.63) \quad k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0, \text{ oder: } \omega \equiv k_0 = |\vec{k}|.$$

Betrachtet man jetzt die Feldgleichungen für $g \neq 0$, z.B.:

$$0 = D^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = (\partial^\mu + ig \sum_a t_a A_a^\mu) \left\{ (\partial_\nu + ig \sum_a t_a A_{a\nu}) \psi_\nu - (\partial_\nu + ig \sum_a t_a A_{a\nu}) \psi_\mu \right\},$$

so findet man, daß falls $\psi^{(*)}$ eine Lösung für $g=0$ ist, dann löst $\psi^{(*)}$, mit

$$(3.64) \quad \psi^{(*)} \equiv e^{ig \sum_a t_a A_a x^1} \cdot \psi^{(*)},$$

die Gleichungen für $g \neq 0$, da ja gelten soll $A_{a1} = \text{const.}$ Mit den Entwicklungen der Glgen.(3.60) und unter Berücksichtigung der zusätzlichen Phasen aus Glg.(3.64) lassen sich daher die allgemeinen Lösungen der Feldgleichungen im k -Raum darstellen. Es gilt ferner:

$$(3.65) \quad \begin{aligned} & \mathcal{H}(\psi, \psi^*) \\ &= \pi_j^* \pi_j + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_{ij}^* \tilde{\mathcal{G}}_{ij} + ig \sum_a t_a A_a^0 (\pi_j \psi_j - \pi_j^* \psi_j^*) \\ &= \pi_j^* \pi_j + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_{ij}^* \tilde{\mathcal{G}}_{ij} + ig \sum_a t_a A_a^0 (\pi_j \psi_j - \pi_j^* \psi_j^*), \end{aligned}$$

denn die konjugiert komplexen Phasen nach Glg.(3.64) heben sich überall weg, und alle kovarianten Ableitungen in den $\pi_j, \tilde{\mathcal{G}}_{ij}$ sind wieder durch einfache Ableitungen zu ersetzen, z.B.:

$$e^{ig \sum_a t_a A_a x^1} \psi^* D_\mu e^{-ig \sum_a t_a A_a x^1} \psi = \psi^* \partial_\mu \psi.$$

Aus Glg.(3.65) sieht man, daß die geladenen Felder in der Strahlungseichung nur mit der vierten Komponente des äußeren Potentials wechselwirken.

Man kann jetzt die (integrierte) Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ im

k-Raum berechnen. Mit den Glgen. (3.60) erhält man:
(die Argumente der Feldamplituden und Polarisationsvektoren werden der Übersichtlichkeit halber weggelassen)

$$\begin{aligned}\pi_j &= -G_{0j}^* = -\partial_0 \mathcal{L}_j^* \\ &= -\int \frac{d^3k}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda=1}^2 e_j \partial_0 \left(\alpha_+^* e^{ik \cdot x} + \alpha_- e^{-ik \cdot x} \right) \\ &= -i \int \frac{d^3k \cdot \omega}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda} e_j \left(\alpha_+^* e^{ik \cdot x} - \alpha_- e^{-ik \cdot x} \right),\end{aligned}$$

$$\pi_j^* = i \int \frac{d^3k \cdot \omega}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda} e_j \left(\alpha_+ e^{-ik \cdot x} - \alpha_-^* e^{ik \cdot x} \right),$$

$$G_{ij} = i \int \frac{d^3k}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda} \left(k_i e_j - k_j e_i \right) \left(\alpha_+ e^{-ik \cdot x} - \alpha_-^* e^{ik \cdot x} \right),$$

$$G_{ij}^* = -i \int \frac{d^3k}{(2\omega(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(k_i e_j - k_j e_i \right) \left(\alpha_+^* e^{ik \cdot x} - \alpha_- e^{-ik \cdot x} \right),$$

also mit Glg. (3.65):

$$\begin{aligned}(3.66) \quad H &\equiv \int d^3x \, H(W, W^*) \\ &= \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\omega(2\pi)^3 \cdot 2\omega'(2\pi)^3)^{1/2}} \sum_{\lambda \lambda'=1}^2 \\ &\quad \left\{ \omega \omega' e_j e_{j'} \left(\alpha_+ e^{-ik \cdot x} - \alpha_-^* e^{ik \cdot x} \right) \left(\alpha_+^{*'} e^{ik' \cdot x} - \alpha_-' e^{-ik' \cdot x} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (k_i e_j - k_j e_i) (k_i' e_{j'} - k_j' e_{i'}) \left(\alpha_+^* e^{ik \cdot x} - \alpha_- e^{-ik \cdot x} \right) \left(\alpha_+^{*'} e^{ik' \cdot x} - \alpha_-' e^{-ik' \cdot x} \right) \\ &\quad + g \sum_a f_a A_a^\sigma \omega e_j e_{j'} \left(\alpha_+^* e^{ik \cdot x} - \alpha_- e^{-ik \cdot x} \right) \left(\alpha_+^{*'} e^{ik' \cdot x} + \alpha_-^{*'} e^{ik' \cdot x} \right) \\ &\quad \left. + (\alpha_+ e^{-ik \cdot x} - \alpha_-^* e^{ik \cdot x}) \left(\alpha_+^{*'} e^{ik' \cdot x} + \alpha_-^{*'} e^{ik' \cdot x} \right) \right\} \\ &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\omega \cdot 2\omega')^{1/2}} \sum_{\lambda \lambda'} \left\{ \omega \omega' e_j e_{j'} (\alpha_+ \alpha_+^{*'} + \alpha_-^* \alpha_-') \right. \\ &\quad + (k_i k_i' e_j e_{j'} - k_i k_j' e_j e_{i'}) (\alpha_+^* \alpha_+^{*'} + \alpha_- \alpha_-^{*'}) \\ &\quad \left. + 2g \sum_a f_a A_a^\sigma \omega e_j e_{j'} (\alpha_+^* \alpha_+^{*'} - \alpha_- \alpha_-^{*'}) \right\} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),\end{aligned}$$

wobei die Fourier-Darstellung der Dirac- δ -Funktion berücksichtigt wurde:

$$\delta^3(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} ;$$

außerdem wurden unwesentliche Phasenfaktoren $\sim e^{\pm i(\omega - \omega')t}$ weggelassen, denn wegen der Glgen. (3.63) gilt: $\vec{k} = \vec{k}' \Leftrightarrow \omega = \omega'$.

Wenn man eine Impulsintegration ausführt und die Orthogonalitätsrelationen der Polarisationsvektoren, Glgen. (3.61, 62), verwendet, findet man aus Glg. (3.66) das sehr einfache Resultat:

$$(3.67) \quad H = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left\{ \omega(k) \left(\alpha_{+}^{*}(\vec{k}, \lambda) \alpha_{+}(\vec{k}, \lambda) + \alpha_{-}^{*}(\vec{k}, \lambda) \alpha_{-}(\vec{k}, \lambda) \right) + g \sum_{\alpha=3,8} f_{\alpha} A_{\alpha}^0 \left(\alpha_{+}^{*}(\vec{k}, \lambda) \alpha_{+}(\vec{k}, \lambda) - \alpha_{-}^{*}(\vec{k}, \lambda) \alpha_{-}(\vec{k}, \lambda) \right) \right\}.$$

Die kanonische Quantisierung kann jetzt endgültig durchgeführt werden, indem man die Feldamplituden $\alpha_{\pm}, \alpha_{\pm}^{*}$ durch hermitesche Operatoren $a_{\pm}, a_{\pm}^{\dagger}$ ersetzt, die den folgenden Vertauschungsrelationen genügen sollen:

$$(3.68) \quad \left(a_{\pm}(\vec{k}, \lambda), a_{\pm}^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') \right) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\left(a_{\pm}(\vec{k}, \lambda), a_{\pm}(\vec{k}', \lambda') \right) = \left(a_{\pm}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda), a_{\pm}^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') \right) = 0.$$

Da es wegen dieser Kommutatorbeziehungen auf die Reihenfolge der Operatoren ankommt, muß man i.A. die Ersetzung folgendermaßen durchführen:

$$\alpha^{*} \alpha = \frac{1}{2} (\alpha^{*} \alpha + \alpha \alpha^{*}) \longrightarrow \frac{1}{2} (a^{\dagger} a + a a^{\dagger}).$$

Man erhält dann wegen der Vertauschungsrelationen den Hamilton-Operator $\hat{H}$:

$$(3.69) \quad \hat{H} = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left\{ \omega(k) \left(a_{+}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) a_{+}(\vec{k}, \lambda) + a_{-}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) a_{-}(\vec{k}, \lambda) \right) + \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} = \delta^3(0) \right. \\ \left. + g \sum_{\alpha=3,8} f_{\alpha} A_{\alpha}^0 \left(a_{+}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) a_{+}(\vec{k}, \lambda) - a_{-}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) a_{-}(\vec{k}, \lambda) \right) \right\}.$$

Der divergente Term $\sim \int d^3x \int d^3k \omega(k)$ rührt von den quantenmechanischen Nullpunktsschwingungen der "Feldoszillatoren" her; er wird hier insbesondere nicht von der Wechsel-

wirkung mit dem konstanten äußeren Potential $\bar{A}$ beeinflusst und wird im Folgenden nicht weiter betrachtet. In diskreter Schreibweise lautet der Hamilton-Operator dann:

$$(3.70) \quad \hat{H} = \sum_{\vec{k}, \lambda, \sigma = \pm} \left\{ \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}\lambda\sigma}^+ a_{\vec{k}\lambda\sigma} + g \sum_a f_a^{\sigma} \bar{A}_a^{\sigma} a_{\vec{k}\lambda\sigma}^+ a_{\vec{k}\lambda\sigma} \right\} \\ \equiv \hat{H}_{mh} ,$$

wobei durch die letzte Gleichung angedeutet wird, daß es sich um einen repräsentativen Teil des zur vollen Lagrange-Dichte $\mathcal{L}'$, Glg.(3.48), gehörigen Hamilton-Operators $\hat{H}'$ handelt (vgl. Bem. vor Glg.(3.54)). $\hat{H}'$ erhält man (in der Strahlungseichung), indem man alle Beiträge voneinander unabhängiger Felder aufsummiert:

$$(3.71) \quad \hat{H}' \equiv \hat{H}_3 + \hat{H}_8 + \sum_{mh=12,45,67} \hat{H}_{mh} \\ \equiv \sum_{\vec{k}, \lambda=1,2} \left\{ \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}\lambda}^{+(3)} a_{\vec{k}\lambda}^{(3)} + a_{\vec{k}\lambda}^{+(8)} a_{\vec{k}\lambda}^{(8)} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\sigma=\pm, mh=12,45,67} \left(\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}\lambda\sigma}^{+(mh)} a_{\vec{k}\lambda\sigma}^{(mh)} + g \sum_{\alpha=3,8} f_{mh\alpha} \bar{A}_{\alpha}^{\sigma} a_{\vec{k}\lambda\sigma}^{+(mh)} a_{\vec{k}\lambda\sigma}^{(mh)} \right) \right\}.$$

Es sei bemerkt, daß für alle Felder lediglich die beiden physikalischen (transversalen) Freiheitsgrade zum Hamilton-Operator beitragen; da die Einteilchenenergieniveaus hier u.a. unabhängig von der Polarisationsrichtung λ sind, ergibt die Summe über λ bei statistischen Betrachtungen einfach einen zusätzlichen Entartungsfaktor $d=2$ wie z.B. um Glg.(1.8) diskutiert. Außerdem fällt auf, daß der Hamilton-Operator diagonal in der Besetzungszahldarstellung ist, da $\hat{H}'$ sich aus verschiedenen Teilchenzahloperatoren zusammensetzt [32].

Damit kann man zum Ausgangspunkt der Überlegungen in diesem Abschnitt zurückkehren und eine "physikalische" Interpretation der generierenden Funktion für Quarks und Gluonen angeben (siehe Glgen.(3.32-34)). Wenn man geeignete "Winkelvariable" φ, ψ definiert,

$$(3.72) \quad g\vec{A}_3^\sigma \equiv -i \frac{\varphi}{\beta} \quad , \quad g\vec{A}_8^\sigma \equiv -i \frac{\psi}{\beta} \quad ,$$

dann folgt unmittelbar aus Glg.(3.71):

$$(3.73) \quad \hat{H}' = \hat{H}_0^G - i \frac{\varphi}{\beta} \hat{I}_3^G - i \frac{\psi}{\beta} \hat{Y}_8^G \stackrel{(3.32)}{=} \hat{H}^{G_{ue}}(\varphi, \psi) \quad ,$$

denn in der Teilchenzahldarstellung gilt:

$$(3.74a) \quad \hat{I}_3^G = \sum_{\kappa\lambda\sigma mn} t_{3mn} \sigma \frac{a_{\kappa\lambda\sigma}^{+(mn)}}{\kappa\lambda\sigma} a_{\kappa\lambda\sigma}^{(mn)} \quad ,$$

$$(\sigma = \pm, mn = 12, 45, 67)$$

$$(3.74b) \quad \hat{Y}_8^G = \sum_{\kappa\lambda\sigma mn} t_{8mn} \sigma \frac{a_{\kappa\lambda\sigma}^{+(mn)}}{\kappa\lambda\sigma} a_{\kappa\lambda\sigma}^{(mn)} \quad ,$$

wovon man sich leicht anhand von Fig.5 und den Elementen der Strukturkonstanten aus (3.38) überzeugen kann.

Mit der besonderen Wahl des äußeren Potentials, Glgen. (3.72), läßt sich also der Beitrag der Gluonen zur generierenden Funktion in Glg.(3.34) auffassen als gewöhnliche Zustandssumme für Gluonen, die mit diesem ("Vakuum-") Potential wechselwirken, wobei die Wechselwirkung durch die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}'$, Glg.(3.44), näher spezifiziert wird [27]. - Vergleichbare Berechnungen von Zustandssummen für (freie) Fermionen und Bosonen in Vakuumpotentialen mit Hilfe der Pfadintegralmethode findet man in [33]. - Da die minimale Kopplung der Quarks an ein äusseres Farbpotential ebenfalls auf eine $j \cdot \vec{A}$ -Wechselwirkung führt (vgl.Glg. (3.53)), kann man dieselben Überlegungen wie für Gluonen auch für Quarks durchführen und daher den Beitrag der Quarks zur generierenden Funktion in derselben Weise interpretieren [27]. Man hat es dann direkt mit den Quarkfeldern zu tun, wohingegen im Falle der Gluonen erst geeignete masselose geladene Vektorfelder definiert und quantisiert werden mußten, um zu dem Hamilton-Operator $\hat{H}'$ zu gelangen.

Die Umschreibung der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}_{G_{ue}}$, Glg.(3.35), in eine solche für wechselwirkende geladene Vektorfelder unter Vernachlässigung der Selbstwechselwirkung der Gluo-

nen könnte sich für andere Betrachtungen als nützlich erweisen und wurde deshalb ausführlich dargestellt. - Wenn man z.B. in den Glgen.(3.42-44) die Einschränkung des äußeren Potentials auf die 3,8-Richtungen im Farbraum aufgibt und auf diese Weise konstante äußere elektrische und/oder magnetische Felder zuläßt, so können etwa ihr Einfluß auf den Grundzustand des Systems und damit zusammenhängende Fragen nach der Vakuumstruktur untersucht werden (derartige Überlegungen wurden bereits in [22] angestellt, wo außerdem weitere Referenzen zu finden sind).

3.2 Die Zustandssumme für ein farbloses Quark-Glue-Plasma und thermodynamische Eigenschaften kleiner Tröpfchen

Die gemischt kanonisch-großkanonische Zustandssumme für farblose Plasmatröpfchen in der Kontinuumsnäherung und ihre ultrarelativistische Zustandsgleichung.

Zur Bestimmung der Zustandssumme für zu Farbsingletts gekoppelte Quarks und Gluonen ist die vollständige Kenntnis der generierenden Funktion $\mathcal{Z}$ gemäß Glg.(3.24) bzw. Glgen.(3.25-31) notwendig. Ich berechne zu diesem Zweck zuerst die Funktionen $\mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{\omega}$ und $\mathcal{Z}_{\text{Gluon}}^{\omega'}$ für die entsprechenden Farbladungskomponenten in der Kontinuumsnäherung, die streng genommen nur für ein hinreichend großes (Quantisierungs-)Volumen gültig ist. - In [22] wurde bei einer inneren SU(2)-Symmetrie der Effekt diskreter Energieniveaus berücksichtigt und gezeigt, daß er qualitativ in die gleiche Richtung wie die Projektion auf eine feste Darstellung der Symmetriegruppe wirkt, daß er aber lediglich eine kleine zusätzliche Korrektur ($\leq 10\%$) bedeutet ($\mu_F = 0$).

Es gilt zunächst für die masselosen Gluonen:

$$\begin{aligned}
 (3.75) \quad \mathcal{Z}_1^{\text{Gluon}}(\beta, V) &\equiv \sum_K e^{-\beta \epsilon'_K} \\
 &\longrightarrow d_{\text{Gluon}} \cdot \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-\beta p} = \frac{d_{\text{Gluon}} V T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 e^{-x} \\
 &= \pi^{-2} d_{\text{Gluon}} V T^3,
 \end{aligned}$$

wobei in der Kontinuumsnäherung die Summe über die Einzelchenenergieniveaus durch ein Phasenraumintegral ersetzt wurde, mit $\mathcal{E}(\mu) = \mu$, und der Entartungsfaktor $d_{\text{Glu}} = 2$ berücksichtigt, daß jede Phasenraumzelle zwei transversale Gluonen enthalten kann (vgl. Bem. nach Glg.(3.71)). Mit Glg.(3.30) erhält man also:

$$(3.76) \quad \mathcal{Z}_{\text{Glu}}^{(j)} = \exp 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \cosh \alpha_{(j)} \mathcal{Z}_1^{\text{Glu}}(\mu, V) \\ = \exp 2\pi^2 d_{\text{Glu}} V T^3 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} \cosh \alpha_{(j)} .$$

Diese Fourier-Reihe läßt sich in einem gewissen Periodizitätsbereich zu einem Bernoulli-Polynom aufsummieren [34]:

$$(3.77) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} \cosh h\alpha = \frac{1}{48} \left\{ 2\pi^2(\alpha-\pi)^2 - (\alpha-\pi)^4 - \frac{7}{15}\pi^4 \right\} \\ \equiv -\frac{\pi^4}{3} B_4\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) , \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \pmod{2\pi} ,$$

und man findet schließlich:

$$(3.78) \quad \mathcal{Z}_{\text{Glu}}^{(j)}(V, T) = \\ \exp \frac{\pi^2}{12} d_{\text{Glu}} V T^3 \left\{ -\frac{7}{30} + \left(\frac{\alpha_{(j)}}{\pi} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{(j)}}{\pi} - 1 \right)^4 \right\} , \\ 0 \leq \frac{\alpha_{(j)}}{\pi} \leq 2 \pmod{2} .$$

Analog kann man bei der Berechnung von $\mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(i)}$ verfahren. Ich schlage hier aber wegen des i.A. nicht-verschwindenden chemischen Potentials μ_q einen anderen Weg ein, der sich an einer entsprechenden Rechnung für ein relativistisches ideales Fermi-Gas orientiert [35]. - Für näherungsweise masselose (Fermi-)Quarks (vgl. wegen der Quarkmassen Bem. S.17) ergibt sich wiederum in der Kontinuumsnäherung, mit $\mathcal{E}(\mu) = \mu$, aus Glg.(3.31):

$$(3.79) \quad \ln \mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(i)} = \\ \sum_K \left\{ \ln(1 + e^{-\beta(\mathcal{E}_K - \mu_q) + i\alpha_{(i)}}) + \ln(1 + e^{-\beta(\mathcal{E}_K + \mu_q) - i\alpha_{(i)}}) \right\} \\ \longrightarrow \dots$$

(3.79) . . . $\longrightarrow$ für $-\pi < \alpha_{ij} < \pi \pmod{2\pi}$,

$$d_{\text{quark}} \cdot \int d^3x \left(\frac{d^3L}{d\tau^3} \left\{ \ln(1 + e^{-\beta(\mu - m_f) + i\alpha_{ij}}) + \ln(1 + e^{-\beta(\mu + m_f) - i\alpha_{ij}}) \right\} \right),$$

der Entartungsfaktor $d_{\text{quark}} = 2 \times 2 = 4$ zählt die innere Spin-Isospin-Entartung der leichten Quarks ab. Zur Einschränkung des Wertebereichs der α_{ij} in Glg.(3.79) ist zu sagen, daß i) die 2π -Periodizität der Funktion $\mathcal{Z}_{\text{quark}}^{ij}$ nicht beeinflusst wird, und daß ii) der Ausschluß der Punkte mit der Absicht erfolgt, die Logarithmusfunktionen in Glg. (3.79) eindeutig definieren zu können und beschränkt zu halten. Die Werte $\alpha_{ij} = \pm\pi$ bedeuten mehrere eindimensionale Teilbereiche bezüglich der später auszuführenden Projektion/Integration über einen zweidimensionalen Bereich, da die α_{ij} definitionsgemäß Linearkombinationen der Winkel φ und ψ sind, Glgen.(3.29); bezüglich der Integration über den Parameterbereich der Cartan-Untergruppe der $SU_c^{(3)}$ handelt es sich um "Mengen vom Maß Null", auf denen $\mathcal{Z}_{\text{quark}}^{ij}$ nach Glg.(3.79) ursprünglich endlich ist. Da man $\mathcal{Z}_{\text{quark}}^{ij}$ der nachstehenden Rechnung zufolge analytisch zu den Randpunkten fortsetzen kann, bedeutet dies allenfalls eine nicht-singuläre Änderung des Integranden auf einer solchen "Nullmenge", die aber den Wert des Integrals nicht verändert. - Aus Glg.(3.79) folgt nach einer partiellen Integration:

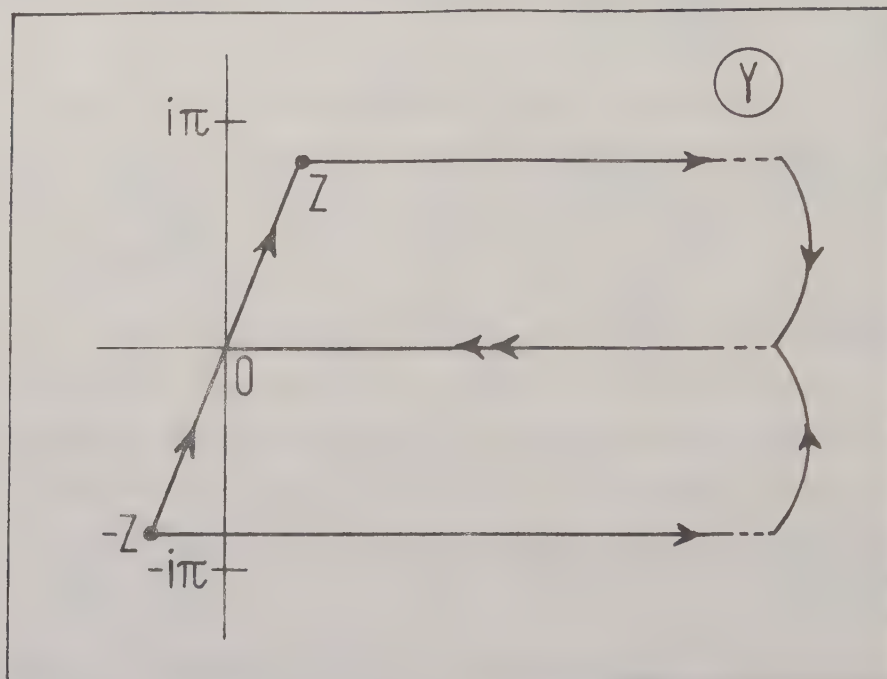
$$(3.80) \quad \ln \mathcal{Z}_{\text{quark}}^{ij} = \frac{d_{\text{quark}} V T^3}{6\pi^2} \int_0^\infty dx x^3 \left\{ \frac{1}{e^{\frac{x-z}{2}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{x+z}{2}} + 1} \right\} \\ \equiv \frac{d_{\text{quark}} V T^3}{6\pi^2} \cdot \mathcal{I}(z),$$

mit einem komplexen "chemischen Potential" in den Fermi-Verteilungen, $z \equiv \beta\mu_f + i\alpha_{ij}$. Weiter läßt sich das Integral durch Substitutionen umformen:

$$\mathcal{I}(z) = \int_{-z}^{\infty-z} dy (y+z)^3 \frac{1}{e^y + 1} + \int_z^{\infty+z} dy (y-z)^3 \frac{1}{e^y + 1}.$$

Die Auswertung erfolgt dann mit Hilfe des Residuensatzes in der komplexen y -Ebene. Der Integrationsweg wird wie in

Fig.6 so gewählt, daß keine Pole des Integranden umlaufen werden.



UFfmTP83-367

Fig.6 Der Integrationsweg zur Berechnung des Integrals $I(z)$, Glgen.(3.8off), in der komplexen y -Ebene

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}(z) &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} dy (y^3 + 3yz^2) \frac{1}{e^y + 1} \\
 &\quad - \int_0^z dy (y-z)^3 \frac{1}{e^y + 1} - \int_0^{-z} dy (y+z)^3 \frac{1}{e^y + 1} \\
 &= 2 \left\{ \frac{7}{8} \Gamma(4) \zeta(4) + 3z^2 \cdot \frac{1}{2} \Gamma(2) \zeta(2) \right\} \\
 &\quad - \int_0^z dy (y-z)^3 \frac{1}{e^y + 1} + \int_0^z dy (-y+z)^3 \frac{1}{e^{-y} + 1} \\
 &= 2 \left\{ \frac{7}{8} \cdot 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} + 3z^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right\} - \int_0^z dy (y-z)^3 \\
 &= \frac{7}{60} \pi^4 + \frac{1}{2} \pi^2 z^2 + \frac{1}{4} z^4,
 \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung eine Integralformel aus [36] benutzt wurde und der entscheidende Schritt in der Anwendung der nachfolgenden Identität in der vorletzten Gleichung bestand:

$$1 = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1}.$$

- Auf die gleiche Weise läßt sich eine ganze Klasse von Integralen über ("masselose") Fermi-Verteilungen analytisch berechnen [35]. - Man erhält also:

$$(3.81) \quad \mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(\omega)}(TV, \mu_f) = \exp \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\text{Quark}} \sqrt{13} \left\{ \frac{7}{30} + \left(\frac{\beta \mu_f}{\pi} + i \frac{\alpha(\omega)}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \mu_f}{\pi} + i \frac{\alpha(\omega)}{\pi} \right)^4 \right\},$$

$$-1 \leq \frac{\alpha(\omega)}{\pi} \leq 1 \pmod{2}.$$

Man kann dieses Ergebnis auch als (komplexes) Bernoulli-Polynom auffassen und sieht dann eine formale Ähnlichkeit (insbesondere für $\mu_f = 0$) mit dem Resultat im Falle der Bose-Statistik für Gluonen, Glg.(3.78).

$$\ln \mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(\omega)} \sim + B_4 \left(\frac{\alpha(\omega)}{2\pi} + \frac{1}{2} - i \frac{\beta \mu_f}{2\pi} \right).$$

In Fig.7 ist der Verlauf der für $\alpha(\omega), \alpha(g_j) = 0$ auf 1 normierten Funktionen $\ln \mathcal{Z}_{\text{Quark}}^{(\omega)}(\mu_f = 0)$ und $\ln \mathcal{Z}_{\text{Gluon}}^{(g_j)}$ in Abhängigkeit von $x \equiv \frac{\alpha(\omega)}{\pi}, \frac{\alpha(g_j)}{\pi}$ dargestellt; die Ähnlichkeit mit einer einfachen Cosinusfunktion scheint überraschend. Doch wenn man sich etwa Glg.(3.76) ansieht oder die Glgen.(3.30,31) und sich zugleich erinnert, daß der erste Term ($\sim \cos \alpha$) in diesen Reihen der Boltzmann-Approximation entspricht (siehe Glgen.(1.7,9)), dann wird klar, daß gerade die Abweichungen von dem $\cos \pi x$ -Verhalten in Fig.7 lediglich von der unterschiedlichen Fermi-/Bose-Statistik der jeweils betrachteten Teilchen herrühren.

Wenn man die Glgen.(3.25,78,81) zusammenfügt, findet man als Resultat die generierende Funktion für das Quark-Gluon-Plasma in der Kontinuumsnäherung:

$$(3.82) \quad \text{mit } 0 \leq \frac{\alpha(\omega)}{\pi} + 1, \frac{\alpha(g_j)}{\pi} \leq 2 \pmod{2},$$

$$(3.82) \quad \tilde{Z}(T, V, \mu_q; \varphi, \psi) = \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ d_{\text{Quark}} \sum_{i=1,2,3,6} \left(\frac{7}{30} - \left(\frac{\alpha_{\tilde{u}i}}{\pi} - i \frac{\beta_{\tilde{u}q}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\tilde{u}i}}{\pi} - i \frac{\beta_{\tilde{u}q}}{\pi} \right)^4 \right) + d_{\text{Gluon}} \sum_{j=1,2,3,8} \left(-\frac{7}{30} + \left(\frac{\alpha_{\tilde{g}j}}{\pi} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\tilde{g}j}}{\pi} - 1 \right)^4 \right) \right\},$$

und wobei die Winkel $\alpha_{\tilde{u}i}$, $\alpha_{\tilde{g}j}$ abhängig von den Projektionswinkeln φ, ψ definiert sind in den Glgen.(3.29).

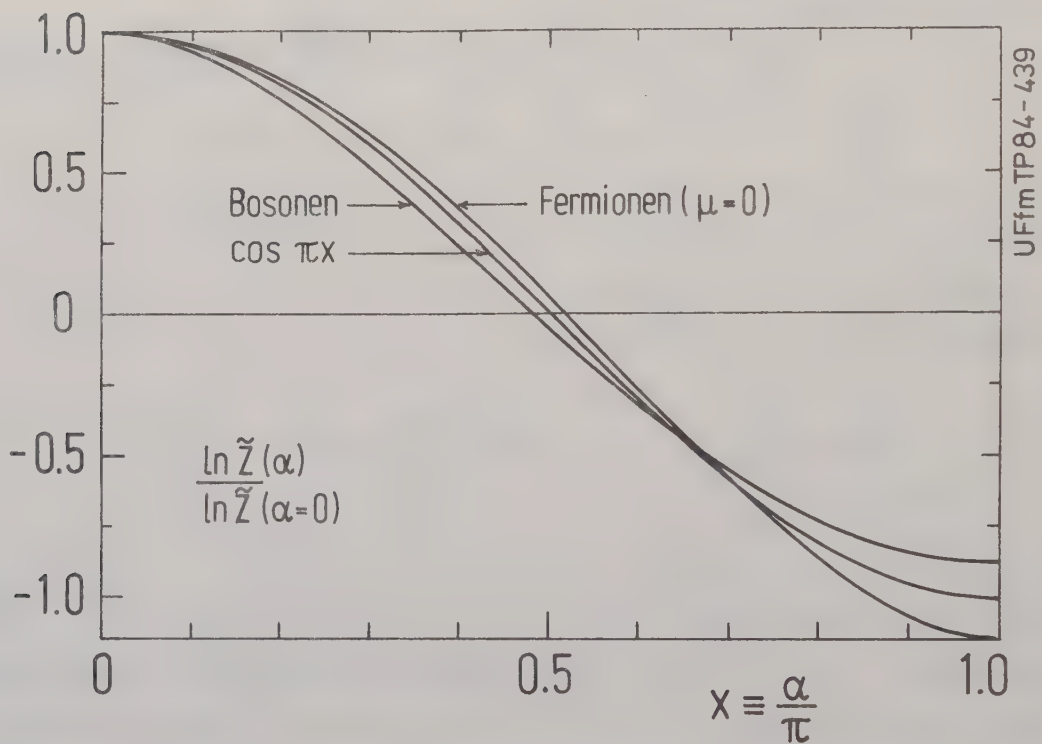


Fig.7 Verlauf der auf 1 normierten Exponenten der generierenden Funktionen für Fermionen (Quarks) und Bosonen (Gluonen) in Abhängigkeit vom Winkelargument (siehe Glgen.(3.78,81), vgl.S.77)

Nach der allgemeinen Projektionsformel, Glg.(2.7), und mit den speziellen Resultaten für die $SU_c(3)$ -Gruppe, Glgen. (3.20-22) und Glg.(3.82), läßt sich jetzt die Zustandssumme für ein zu einem $SU(3)$ -Singlett gekoppeltes Quark-Gluon-Plasmatröpfchen hinschreiben:

$$(3.83) \quad \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}(T,V,\mu_q) =$$

$$e^{-\beta B V} \dim(\sigma,\sigma) \int d\varphi d\psi M(\varphi,\psi) \chi_{(\sigma,\sigma)}^*(\varphi,\psi) \mathcal{Z}(T,V,\mu_q;\varphi,\psi) \\ = \frac{8}{3\pi^2} e^{-\beta B V} \int_{-\pi}^{\pi} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\left(\frac{\psi}{2}\right) \left(\sin \frac{1}{2}(\psi + \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \frac{\varphi}{2}) \right)^2 \mathcal{Z}(T,V,\mu_q;\varphi,\psi),$$

wobei ergänzend wiederum der einem phänomenologischen Vakuumdruck $P_{\text{vac}} = -B$ entsprechende und in Kap.1.2 (insbesondere Glgen.(1.34)) begründete Boltzmann-Faktor eingeführt wurde.

Ohne die komplizierten und i.A. nicht analytisch auswertbaren Gruppenintegrale zu berechnen (vgl. dazu den Abschnitt über Näherungen), kann man nichtsdestoweniger aus der Zustandssumme, Glg.(3.83), sogleich eine Zustandsgleichung für das Quark-Glue-Plasma gewinnen durch partielle logarithmische Ableitungen nach den Zustandsvariablen.

Es gilt für den (Gesamt-)Druck $\mathcal{P}$:

$$(3.84) \quad \mathcal{P} \equiv T \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}}{\partial V} = T \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}^{-1} \int d\Phi (-\beta B + V^{-1} \text{Exp}),$$

wobei der Kürze halber das Integral $\int d\Phi$ symbolisch für die gesamte rechte Seite von Glg.(3.83) stehen soll; mit Exp ist das Argument der Exponentialfunktion der generierenden Funktion, Glg.(3.82), bezeichnet, welches infolge der partiellen Differentiation zusätzlich neben einem Term $\sim B$ im Integranden auftaucht.

Für die (Gesamt-)Energiedichte erhält man entsprechend:

$$(3.85) \quad \frac{E}{V} \equiv V^{-1} \left(- \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}}{\partial \beta} + \frac{\mu_q}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}}{\partial \mu_q} \right) \\ = V^{-1} \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}^{-1} \int d\Phi \left(BV + 3T \text{Exp} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\text{Exp}}{T^3} \right) + \frac{\mu_q}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu_q} \text{Exp}}_{\equiv \sigma} \right) \\ = T \mathcal{Z}_{(\sigma,\sigma)}^{-1} \int d\Phi (\beta B + 3 V^{-1} \text{Exp}).$$

Ein Vergleich der Glgen.(3.84,85) liefert das Resultat:

$$(3.86) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{3} \left(\frac{\mathcal{E}}{V} - 4B \right) ;$$

man findet also im Wesentlichen die ultrarelativistische Zustandsgleichung, wie sie für masselose Quarks und Gluonen zu erwarten war. Der "nicht-perturbative" Zusatzterm $\sim B$ gibt in diesem einfachen Bild das Confinement der $SU_c(3)$ -Farbladungen wieder. Glg.(3.86) verknüpft den Gesamt(Strahlungs- plus Vakuum-)Druck in einem mehr oder weniger großen, heißen Bag bei endlicher Baryonenzahldichte mit der (Gesamt-)Energiedichte darin unter Berücksichtigung der Farblosigkeitsbedingung; sie wird auch Virialgleichung genannt und für einen Bag mit drei Quarks bzw. einem Quark-Antiquark-Paar bereits für das ursprüngliche M.I.T.-Bag-Modell ($T=0$) hergeleitet [13]. - Die besonderen thermodynamischen Eigenschaften kleiner farbloser Plasmatröpfchen ergeben sich jedoch erst nach einer expliziten Berechnung der Zustandssumme $\mathcal{Z}_{(0,0)}$ und werden in den folgenden Abschnitt genauer betrachtet.

Hier soll abschließend noch gezeigt werden, daß die Zustandssumme $\mathcal{Z}_{(0,0)}$ eine reellwertige Funktion ist (vgl.Bem. i)S.59), was damit auch auf alle daraus abgeleiteten Größen zutrifft. Gemäß Glgen.(3.81,83) ist die Zustandssumme genau dann reell, wenn gilt:

$$(3.87) \quad \mathcal{Z}_{(0,0)}(T, V, \mu_q) = \mathcal{Z}_{(0,0)}(T, V, -\mu_q) ;$$

diese Gleichung bedeutet zugleich die Quark-Antiquark-Symmetrie der Zustandssumme, denn ein Vorzeichenwechsel von μ_q kann in eine Redefinition der Teilchen- bzw. Antiteilchenzahloperatoren absorbiert werden (siehe z.B. Glg.(3.28)). Es gilt wegen Glgen.(3.29,82,83):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{(0,0)}(-\mu_q) &= \int_{SU(3)} d\varphi d\psi M(\varphi, \psi) \tilde{\mathcal{Z}}(-\mu_q; \varphi, \psi) \\ &= \int_{SU(3)} d\varphi d\psi M(\varphi, \psi) \tilde{\mathcal{Z}}(\mu_q; -\varphi, -\psi) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{\text{SU}(3)} d(-\varphi) d(-\psi) M(-\varphi, -\psi) \tilde{Z}(\mu_q; -\varphi, -\psi) \\ &= \tilde{Z}_{(0,0)}(\mu_q) \quad , \quad \text{d.e.d.} \quad ; \end{aligned}$$

in der zweiten Gleichung wurde insbesondere benutzt, daß der gluonische Anteil von $\tilde{Z}$ gerade in den α_{ij} ist (siehe Glg.(3.76)) und damit invariant unter $\varphi, \psi \rightarrow -\varphi, -\psi$.

Einen analogen Beweis der Realität von $\tilde{Z}_{(0,0)}$ kann man bereits nach den Glgen.(3.30,31) in Kap.3.1 führen:

$$\begin{aligned} (3.88) \quad \tilde{Z}_{(0,0)}^* &= \int_{\text{SU}(3)} dM(\varphi, \psi) \prod_{\substack{i=1,2,3 \\ j=\lambda, \mu, \nu, \delta}} \tilde{Z}_{\text{Quark}}^{(i)*} \tilde{Z}_{\text{Glue}}^{(j)} \\ &\stackrel{(3.31)}{=} \int_{\text{SU}(3)} dM(\varphi, \psi) \prod_{i,j} \tilde{Z}_{\text{Quark}}^{(i)}(-\varphi, -\psi) \tilde{Z}_{\text{Glue}}^{(j)} \\ &\stackrel{(3.30,23)}{=} \int_{\text{SU}(3)} dM(-\varphi, -\psi) \prod_{i,j} \tilde{Z}_{\text{Quark}}^{(i)}(-\varphi, -\psi) \tilde{Z}_{\text{Glue}}^{(j)}(-\varphi, -\psi) = \tilde{Z}_{(0,0)}, \text{d.e.d.} \end{aligned}$$

Die Realität der Zustandssumme hängt also nicht etwa von der Kontinuumsnäherung oder der Annahme masseloser Quarks ab, sondern spiegelt die Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie.

Numerische Auswertung der Zustandssumme und Berechnung thermodynamischer Zustandsgrößen.

Die bisher abgeleiteten Eigenschaften (Realität, ultrarelativistische Zustandsgleichung) der Zustandssumme in Glg. (3.83) folgten einzig aus der Betrachtung jener (Gruppen-) Integraldarstellung für $\tilde{Z}_{(0,0)}$ bzw. aus Eigenschaften der Maßfunktion M und der generierenden Funktion $\tilde{Z}$. Um jetzt die Abhängigkeit irgendeiner Zustandsgröße (Energie, Entropie u.a.) von den Zustandsvariablen Temperatur, Volumen oder baryonischem chemischen Potential herauszufinden, muß die Zustandssumme explizit berechnet werden.

Da die Integrationen in Glg.(3.83) nur näherungsweise analytisch ausführbar sind (vgl. den folgenden Abschnitt), wurde zu diesem Zweck ein zweidimensionales numerisches

Integrationsprogramm entwickelt, das mit maximal 384×384 Gaußschen Integrationspunkten arbeitet [9]. Die Anzahl der Stützpunkte kann variiert werden, um insbesondere bei oszillierenden Integranden ($\mu_g \neq 0$, s.u. Glgen.(3.91,92)) die Konvergenz des Integrationsprogramms prüfen zu können; bei allen im Folgenden graphisch dargestellten Resultaten numerischer Rechnungen ist die Genauigkeit besser als die Zeichengenauigkeit (soweit nicht anders vermerkt).

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, die generierende Funktion $\tilde{Z}$, Glg.(3.82), zunächst umzuschreiben, indem man $\tilde{Z}(\varphi=\psi=0)$ als Faktor herauszieht:

$$(3.89) \quad \tilde{Z}(\varphi, \psi) = \tilde{Z}(0,0) \cdot \frac{\tilde{Z}(\varphi, \psi)}{\tilde{Z}(0,0)} \equiv \tilde{Z}^{(0)} \cdot \tilde{Z}^{(1)}(\varphi, \psi),$$

mit,

$$(3.90) \quad \tilde{Z}^{(0)}(VT^3, \beta\mu_g) \equiv \exp\left\{\frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ 2 \cdot 3 \cdot d_\alpha \left(\frac{7}{60} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\mu_g}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta\mu_g}{\pi} \right)^4 \right) + 8 \cdot d_G \cdot \frac{8}{60} \right\} \right\},$$

und,

$$(3.91) \quad \tilde{Z}^{(1)}(VT^3, \beta\mu_g; \varphi, \psi) \equiv \prod_{i=r,g,b} \cos \frac{\pi}{6} d_\alpha VT^3 \left(\frac{\beta\mu_g}{\pi} \right) \left(\frac{\alpha_{(i)}}{\pi} \right)^3 \cdot \exp\left\{\frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ d_\alpha \sum_{i=r,g,b} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{(i)}}{\pi} \right)^4 - [1 + 3 \left(\frac{\beta\mu_g}{\pi} \right)^2] \left(\frac{\alpha_{(i)}}{\pi} \right)^2 \right) + d_G \sum_{j=\lambda,\mu,\nu} \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{\alpha_{(j)}}{\pi} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{(j)}}{\pi} - 1 \right)^4 \right) \right\} \right\},$$

für $0 \leq \frac{\alpha_{(i)}}{\pi} + 1, \frac{\alpha_{(j)}}{\pi} \leq 2 \pmod{2}$.

In Glg.(3.91) wurde verwendet, daß wegen der Glgen.(3.29) gilt:

$$\sum_{i=r,g,b} \alpha_{(i)} = 0;$$

außerdem wurde in die Definition von $\tilde{Z}^{(1)}$ nur der im Folgenden relevante Realteil einbezogen, da $\tilde{Z}(0,0)$ reell ist, Glg.(3.88), bzw. der Imaginärteil von $\tilde{Z}$ (s.Glg.(3.82)) durch die Integration über die Gruppe verschwindet. Mit in Glg.(3.90) findet man exakt die großkanonische Zustandssumme für ein ideales Quark-Glue-Plasma von $(2x)3 \times d_\alpha$

Fermionen (q plus $\bar{q}$) und $8 \times d_G$ Bosonen [15,35]; die (Vielteilchen-)Zustände unterliegen darin keiner Klassifizierung bezüglich der inneren $SU_c(3)$ -Symmetrie, was sich in der zusätzlichen dreifachen Entartung ("Farben") der (Anti-)Quarks und achtfachen Entartung der Gluonen äußert (vgl. Fig.4,5). Glg.(3.89) zusammen mit Glg.(3.83) bedeutet weiterhin, daß man nach Ausführung der Projektionsintegrale eine Korrektur zur großkanonischen Zustandssumme - i.e. zum Stefan-Boltzmann-Gesetz für Fermionen und Bosonen - erwarten muß, die dann von der Beschränkung auf Color-Singletts herrührt. Diese Korrektur wird (wie auch $Z^{(0)}$) von den beiden Kombinationen VT^3 und $\beta\mu_q$ der Zustandsvariablen T, V, μ_q abhängen:

$$(3.92) \quad Z_{(0,0)}(T, V, \mu_q) = e^{-\beta B V} Z^{(0)}(VT^3, \beta\mu_q) \int_{SU_c(3)} d\varphi d\psi M(\varphi, \psi) Z^{(1)}(VT^3, \beta\mu_q; \varphi, \psi) \\ \equiv e^{-\beta B V} Z^{(0)} Z^{(1)}.$$

Zur Demonstration der durch $Z^{(1)}$ bedingten Korrektur des Stefan-Boltzmann-Grenzfalles berechne ich die Entropie $S_{(0,0)}$ und die Energie $E_{(0,0)}$ der farblosen Quark-Glue-Plasmaphase. Sei hier $B \equiv 0$, dann gilt:

$$(3.93) \quad S_{(0,0)} = S^{(0)} + S^{(1)}, \quad S^{(x)} \equiv \partial_T (T \ln Z^{(x)}),$$

$$(3.94) \quad E_{(0,0)} = E^{(0)} + E^{(1)}, \quad E^{(x)} \equiv \left(-\partial_\beta + \frac{\mu_q}{\beta} \partial_{\mu_q} \right) \ln Z^{(x)};$$

$S^{(x)}, E^{(x)}$ bezeichnen die aus den entsprechenden Faktoren in Glg.(3.92) abgeleiteten Beiträge. Glg.(3.94) läßt sich vereinfachen, wegen:

$$Z^{(x)} = Z^{(x)}(VT^3, \beta\mu_q)$$

daraus folgt:

$$(3.95) \quad E^{(x)} = -\partial_\beta \ln Z^{(x)}.$$

Man erhält damit:

$$(3.96) \quad S^{(0)} = \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ 2 \cdot 3 \cdot d_Q \left(\frac{7}{15} + \left(\frac{\beta \mu_q}{\pi} \right)^2 \right) + 8 \cdot d_G \cdot \frac{8}{15} \right\},$$

$$(3.97) \quad E_{c_1 c_2 c_3}^{(0)} \equiv E^{(0)} = 3T \ln Z^{(0)} \\ = \frac{\pi^2}{4} VT^4 \left\{ 2 \cdot 3 \cdot d_Q \left(\frac{7}{60} c_1 + \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{\beta \mu_q}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{4} c_2 \left(\frac{\beta \mu_q}{\pi} \right)^4 \right) + 8 \cdot d_G \cdot \frac{8}{60} \cdot c_3 \right\},$$

mit $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Zum Vergleich sei ferner der entsprechende Ausdruck für die Energie angegeben, wie er sich für ein wechselwirkendes Quark-Gluon-Plasma aus einer störungstheoretischen Rechnung erster Ordnung in der QCD-Kopplungskonstanten α_S ergibt [10,15,22,37]:

$$(3.98) \quad E_{\alpha_S}^{(0)} = E_{c_1 c_2 c_3}^{(0)}, \text{ mit } \begin{cases} c_1 = 1 - \frac{50}{21} \cdot \frac{\alpha_S}{\pi} \\ c_2 = 1 - 2 \cdot \frac{\alpha_S}{\pi} \\ c_3 = 1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{\alpha_S}{\pi} \end{cases};$$

i.A. gilt:

$$\alpha_S = \alpha_S(\mu^2) \hat{=} \alpha_S(T, \mu_q),$$

d.h. die Kopplungsstärke hängt vom Impulsübertrag aneinander streuender Quarks oder Gluonen ab (siehe Ref. [10,15,22] und Referenzen darin) und damit indirekt von Dichte und Temperatur des Plasmas [38]. Für große Impulsüberträge /Temperatur/Dichte werden die Teilchen "asymptotisch frei" i.e. $\alpha_S \rightarrow 0$; zur Orientierung wird hier $\alpha_S = .5$ gewählt [15].

Die Korrekturterme, die sich wegen der Beschränkung auf farblose Zustände ergeben, werden aus $Z^{(1)}$ bzw. mit $Z^{(1)}$ berechnet, indem man die notwendigen Differentiationen gemäß Glgen.(3.93,95) analytisch im Integranden von Glg.(3.92) ausführt und anschließend die Gruppenintegration numerisch vollzieht:

$$(3.99) \quad S^{(1)} = \ln Z^{(1)} + T Z^{(1)-1} \partial_T Z^{(1)},$$

$$(3.100) \quad E^{(1)} = T^2 Z^{(1)-1} \partial_T Z^{(1)},$$

mit:

$$\mathcal{Z}^{(1)} = \frac{8}{3\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d(\frac{\varphi}{2}) d(\frac{\psi}{2}) \left(\sin \frac{1}{2}(\psi + \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \frac{\varphi}{2}) \right) \mathcal{Z}^{(0)}.$$

(Zur Vermeidung unnötiger Rechenzeiten bei der numerischen Integration ist es nützlich, alle benötigten Integrale "gleichzeitig" ausrechnen zu lassen, indem man die Integranden als Komponenten eines Vektors auffaßt, die alle bei ein und demselben Aufruf eines Integrationspunktes berechnet werden.)

Die Resultate dieser Rechnungen sind in Fig.8 dargestellt für $\mu_f = 0$ als Funktionen von $TV^{1/3}$, welches im vorliegenden Fall die einzige (dimensionslose) Zustandsvariable des Systems ist [16]; der Vergleich in der eingefügten Figur zeigt, daß bei kleinen Werten der Variablen ($TV^{1/3} \lesssim 1.5$) die Projektion auf Color-Singletts eine deutliche Absenkung (bis zu 50%) der Energie sowohl als auch der Entropie bewirkt verglichen mit dem Stefan-Boltzmann-Grenzfall eines vollkommen freien (u,d-)Quark-Glue-Plasmas.

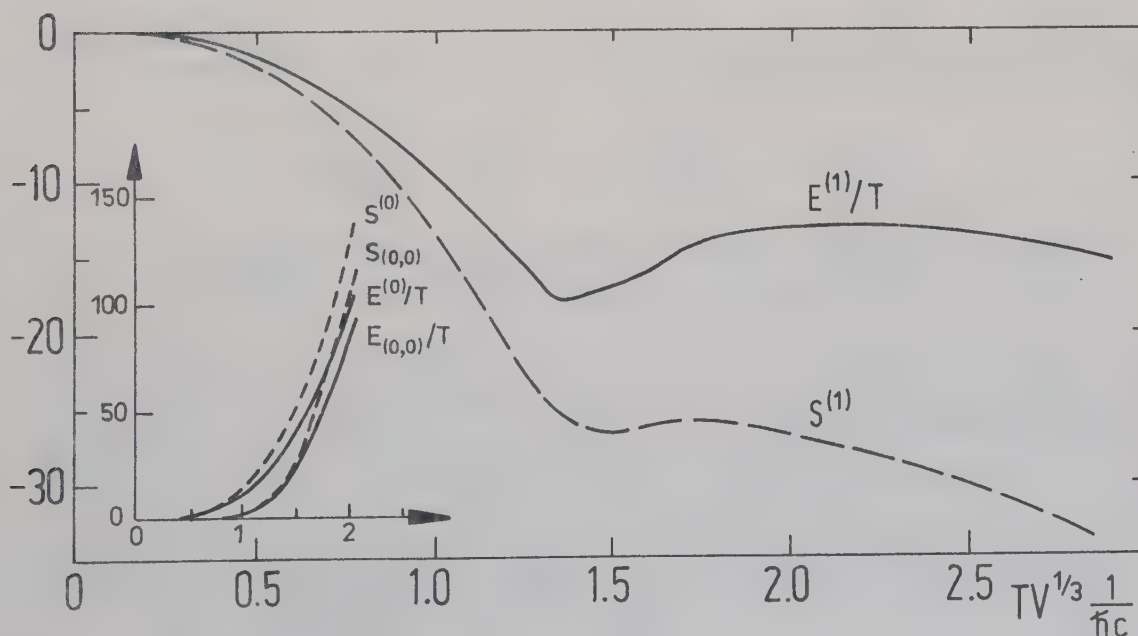


Fig.8 Korrekturen zu Energie/T und Entropie für ein farbloses (u,d-)Quark-Glue-Plasma als Funktion von $TV^{1/3}$

Es sei darauf hingewiesen, daß das nicht-monotone Verhalten (lokales Minimum bei $TV^{1/3} \cong 1.5$) der Korrekturterme sich nicht dermaßen auf Gesamtenergie bzw. -Entropie auswirkt, daß diese ihren monoton mit $TV^{1/3}$ wachsenden Charakter verlieren. - Andererseits kann man einen Effekt der Farblosigkeit eines Plasmatröpfchens aus Fig.8 ablesen, der darin besteht, daß bei gegebener Energie oder Entropie - eine analoge Feststellung trifft auch auf Druck und Baryonenzahldichte zu - und gegebenem Volumen die

physikalische Temperatur im Plasma um bis zu 30% höher (I)

ist, als eine scheinbare Temperatur, wie man sie aus einer Beschreibung durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz erschließen würde. Vor allem bei der Untersuchung aller Abstrahlungsvorgänge aus einem heißen Quark-Glue-Tröpfchen muß man dem in Hinblick auf mögliche Signaturen der Plasmaphase Rechnung tragen. Man kann den Effekt (I) statistisch dadurch erklären, daß wegen der Einschränkung des Phasenraums auf Color-Singletts nicht alle inneren (Farb-)Freiheitsgrade des Systems unabhängig voneinander angeregt werden können.

Um diese Bemerkung zu präzisieren, wird ein effektiver Entartungsparameter D_{eff} wie folgt definiert:

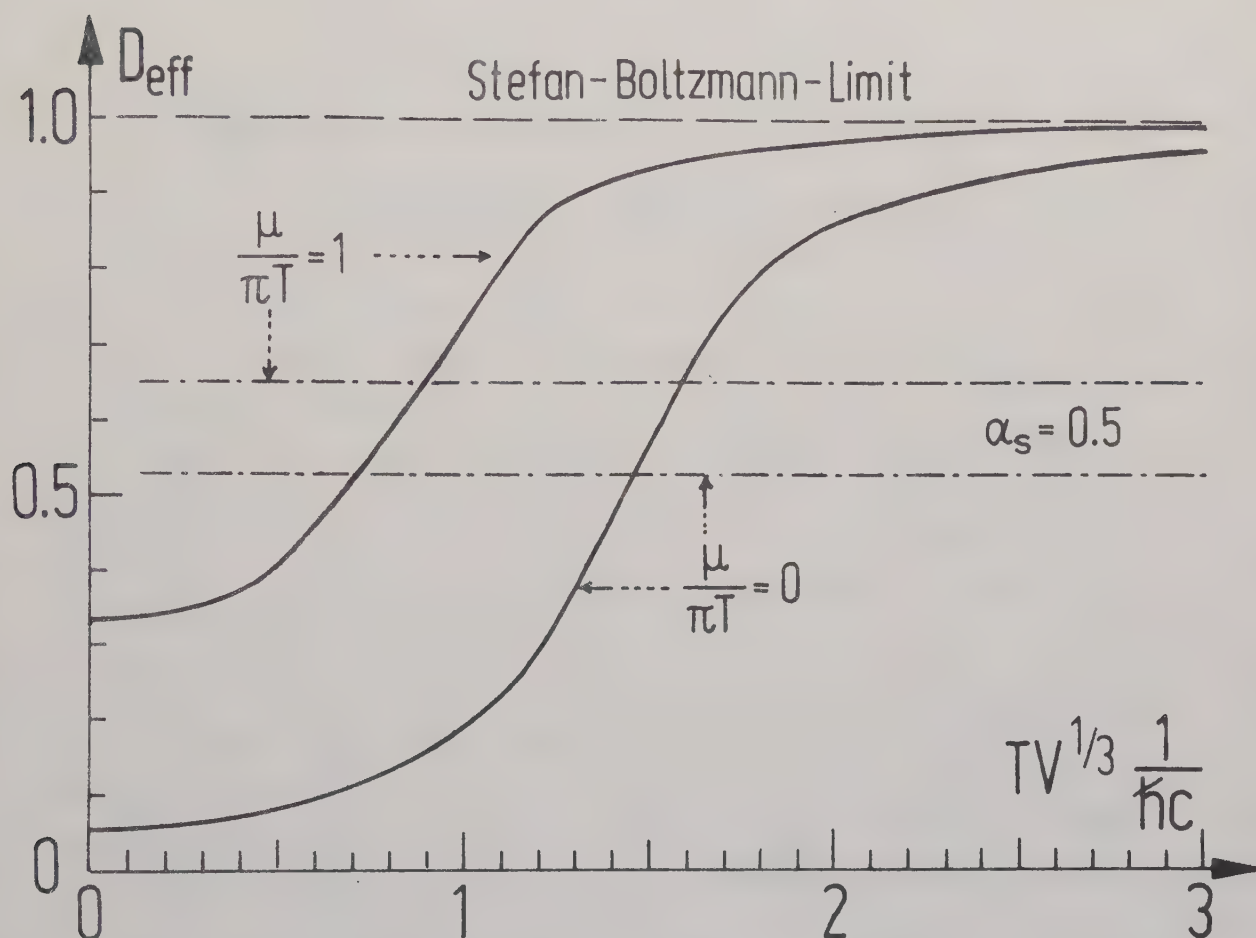
$$(3.101) \quad D_{\text{eff}} \equiv \frac{E_{(0)}^{(1)}}{E_{(0)}} = 1 + \frac{E_{(0)}^{(1)}}{E_{(0)}} ;$$

D_{eff} mißt also gewissermaßen die Abweichung vom Stefan-Boltzmann-Grenzfall bzw. für $\mu_q \neq 0$ die Abweichung vom Grenzfall eines (asymptotisch) freien Fermi(-Quark)-Bose(-Glue)-Plasmas [16,27]. Fig.9 zeigt D_{eff} als Funktion von $TV^{1/3}$ für zwei verschiedene Werte von μ_q ; außerdem ist zum Vergleich die entsprechende Reduktion der Anzahl von inneren Freiheitsgraden durch die perturbative Wechselwirkung dargestellt,

$$D_{\text{eff}}^{\alpha_s=1/2} = \frac{E_{\alpha_s=1/2}^{(0)}}{E_{(0)}} ,$$

wie sie sich aus den Glgen.(3.97,98) ergibt. Auch die Wechselwirkung der Teilchen ($\sim \alpha_s$) kann also effektiv die Anzahl der Freiheitsgrade im Plasma beträchtlich

reduzieren; dieser Einfluß hängt jedoch in der einfachsten störungstheoretischen Näherung gemäß Glg.(3.98) nur von der intensiven Variablen $\beta\mu$ und damit nicht von der Ausdehnung der Plasmaphase ab.



UFFm TP83-366

Fig.9 Der effektive Entartungsparameter D_{eff} als Funktion von $TV^{1/3}$ (z.Vergl. $O(\alpha_s)$ -QCD)

Demgegenüber findet man hier als weiteren Effekt der Beschränkung auf farblose Zustände, daß bei gegebener Temperatur und festem baryochemischen Potential die

Anzahl innerer Freiheitsgrade vom Volumen abhängig (II)

ist. Das Quark-Glue-Plasma verhält sich also nicht mehr extensiv in dem Sinn, daß etwa die thermodynamischen Eigenschaften des Plasmas in zwei separaten Tröpfchen vom Volumen v quantitativ verschieden sind von denen in einem

einzigsten Tröpfchen mit dem Volumen $2v$. Dieser Volumeneffekt und seine Konsequenzen hinsichtlich des Zerfalls eines ggf. experimentell erzeugten Plasmatröpfchens werden im Kapitel 4 genauer untersucht. Weiterhin sei bemerkt, daß man bei gegebenem Volumen den Effekt in Fig.9 auch als

ein "Einfrieren" der Farbfreiheitsgrade
bzw. als eine "Phasentransformation" des Systems (III)

bezeichnen kann. Daß es sich nicht um einen Phasenübergang im üblichen Sinne handelt, erkennt man einerseits daran, daß im thermodynamischen Grenzfall ($V \rightarrow \infty$) die Effekte der Projektion auf Farbsingletts vernachlässigbar werden; das System verhält sich dann wie ein ideales Quark-Glue-Plasma (das asymptotische Verhalten entspricht einer $1/V$ -Korrektur etwa zur Energiedichte, wie sie durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben wird, siehe den folgenden Abschnitt). Andererseits kann man von den Fig.8,9 her erwarten, daß z.B. die spezifische Wärme und höhere Ableitungen der Energiedichte eines endlichen Plasmatröpfchens weder Knicke, noch Diskontinuitäten oder gar Singularitäten aufweisen. Das tatsächliche Verhalten der spezifischen Wärme $C_V^{(0,0)}$ im Vergleich mit dem Stefan-Boltzmann-Grenzfall ($C_V^{(0)}$) sieht man in Fig.10 für $\mu_q=0$; es gilt:

$$(3.102) \quad C_V^{(0,0)} \equiv \frac{1}{V} \frac{\partial E^{(0,0)}}{\partial T}, \quad C_V^{(0)} \equiv \frac{1}{V} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial T} = 4\sigma T^3; \quad \text{"const"}$$

weiterhin mit Glg.(3.101):

$$(3.103) \quad \frac{C_V^{(0,0)}}{C_V^{(0)}} = \frac{1}{4\sigma T^3} \frac{1}{V} \frac{\partial (E^{(0)} D_{eff})}{\partial T} = D_{eff} + \frac{T}{4} \frac{\partial D_{eff}}{\partial T}.$$

Wie man in Fig.10 sieht, weist das

Verhältnis der spezifischen Wärmen ein Maximum (IV)

auf bei $TV^{1/3} \cong 1.5$ mit einem geringfügig über dem Stefan-Boltzmann-Limit liegenden Wert - also gerade in dem Übergangsbereich, wo das Einfrieren der inneren Freiheitsgrade erfolgt. Unter diesem Aspekt kann man bereits erwarten,

daß die Eigenschaften eines (makroskopischen) Ensembles von Plasmatröpfchen durchaus drastische Effekte der Farblosigkeit zeigen (siehe Kap.4).

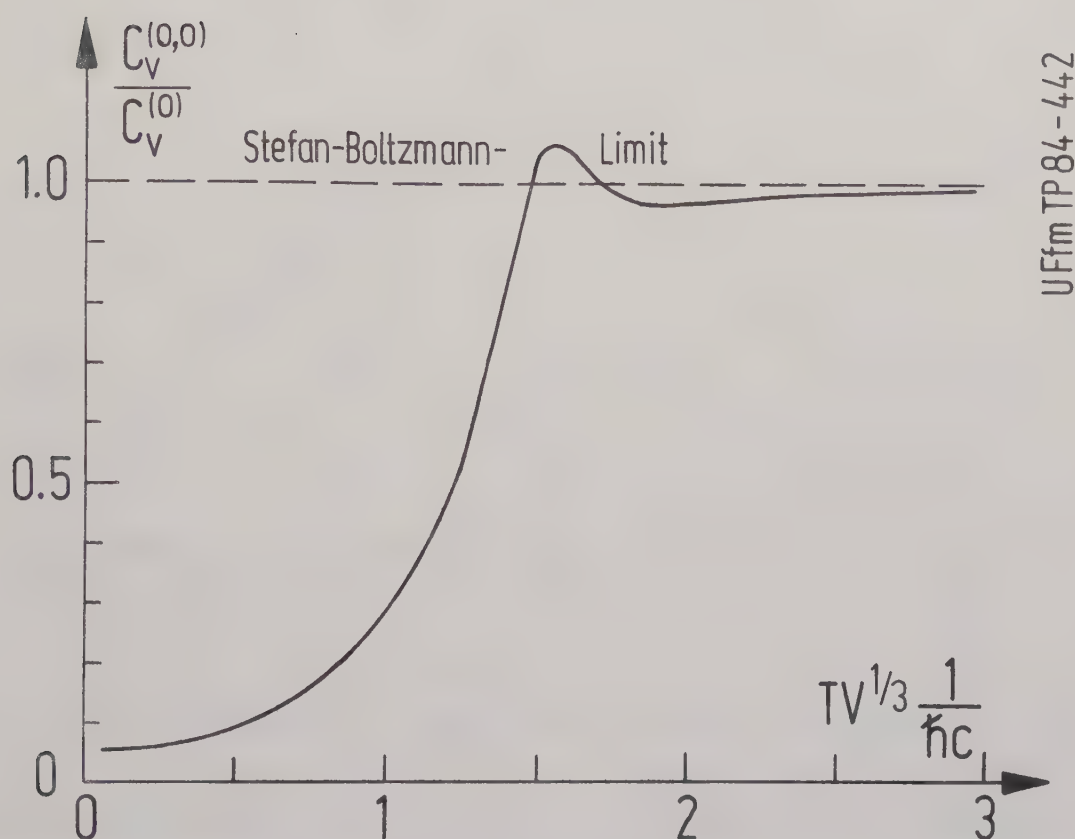


Fig.10 Verhältnis der spezifischen Wärme farbloser zu der von idealen Plasmatröpfchen als Funktion von $TV^{1/3}$

In Fig.11 sieht man schließlich, wie D_{eff} bei festgehaltenem Wert von $TV^{1/3}$ in Abhängigkeit von $\beta\mu_q$ variiert. Insbesondere erkennt man deutlich, daß ein zunehmendes baryonisches chemisches Potential und damit

wachsende Baryonenzahldichte im Plasma den Effekt der Projektion auf Farbsinglettzustände abschwächt [27] (V).

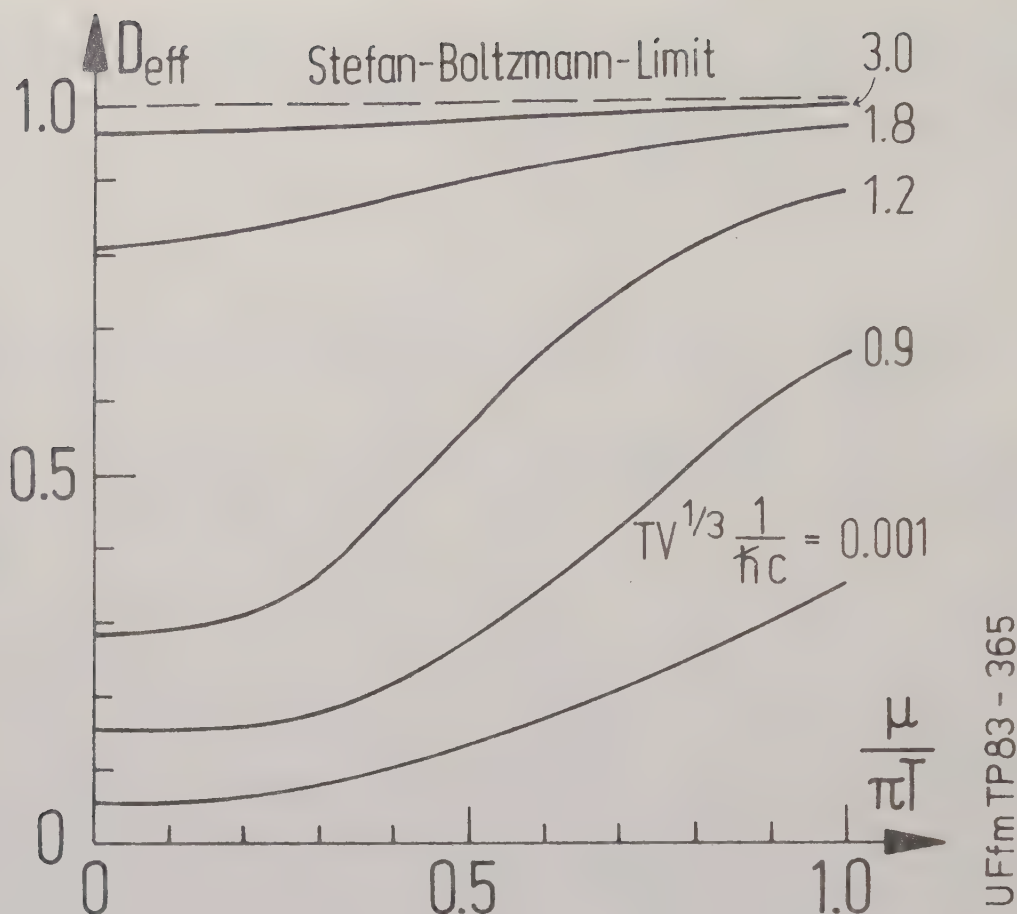


Fig.11 D_{eff} als Funktion von $\beta\mu_q$ mit $TV^{1/3}$ als Parameter

Um einen Anhaltspunkt für die zu betrachtenden Größenordnungen zu geben, wird in Fig.12 die Abhängigkeit des baryonischen chemischen Potentials μ_q von der Baryonenzahldichte $\mathcal{B}$ (in Einheiten der Kerndichte, $\mathcal{B}_0 = .17 \text{ fm}^{-3}$) bei festgehaltener Temperatur für ein ideales (u,d-)Quark-Glue-Plasma wiedergegeben, wie es durch $\mathcal{Z}^{(0)}$, Glg.(3.90), beschrieben wird [35].

Wenn man annimmt, daß durch die exakte Behandlung der $SU_c(3)$ -Symmetrie eine wichtige nicht-perturbative Eigenschaft der QCD berücksichtigt wird, dann kann man von den Resultaten in den Fig.9-11 her erwarten, daß der Phasenübergang erster Ordnung, den man in Monte-Carlo-Simulationen bei $\mu_q = 0$ beobachtet (s.z.B.[39]), durch eine endliche Baryonenzahldichte ebenfalls wesentlich beeinflusst und eventuell von höherer Ordnung sein wird; zuverlässige

Ergebnisse der Gitterrechnungen sind dazu noch nicht bekannt, weil darin bisher dynamische Quarkfreiheitsgrade nur unvollkommen beschrieben werden können (s.zB.[40]).

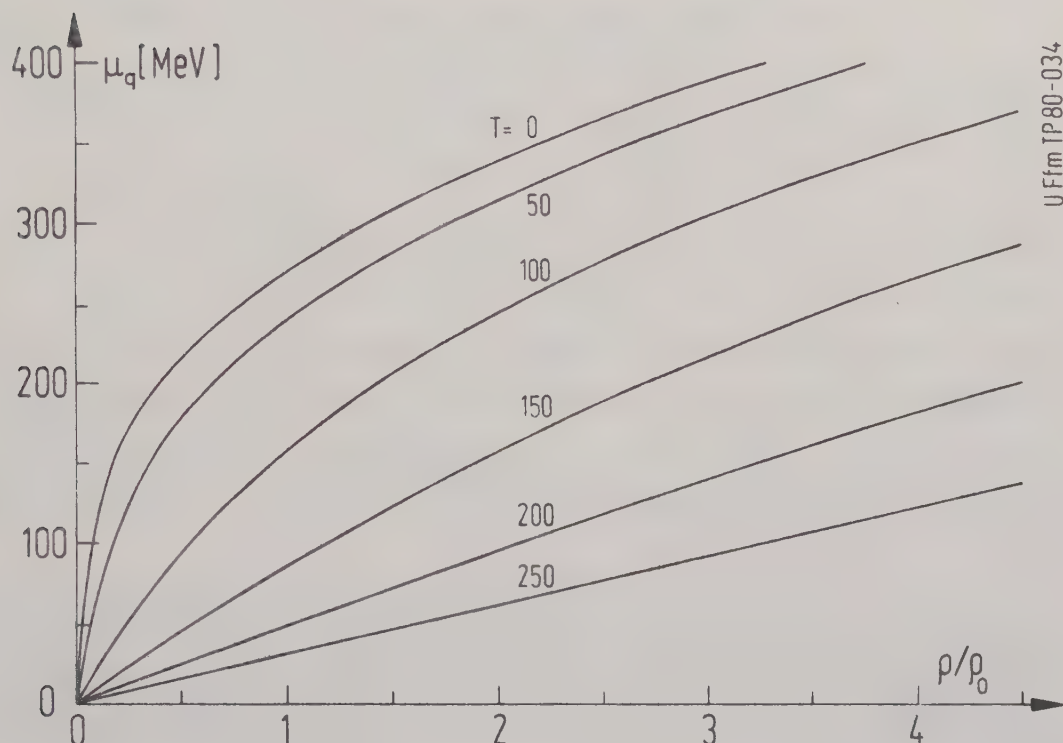


Fig.12 μ_q als Funktion der Baryonenzahldichte bei $T=\text{const}$ für ein ideales (u,d)-Quark-Gluon-Plasma

Auch muß man die bereits diskutierten Effekte endlichen Volumens (II,III) in Zusammenhang mit der Farblosigkeit physikalischer Zustände bei der Interpretation von Monte-Carlo-Daten berücksichtigen, die ja auf endlichen Gittern gewonnen werden - in Ref.[41] wurden solche Korrekturen - 5-10%, gemessen am Stefan-Boltzmann-Limit - bei innerer $SU_c(2)$ -Symmetrie bestimmt. - Die oberflächliche Ähnlichkeit der Resultate in Fig.9,10 zu solchen aus QCD-Gitterrechnungen ist verblüffend; der physikalische Skalenparameter Λ tritt dann an die Stelle von $V^{-1/3}$ (s.z.B.[14] und Referenzen darin; zwei neuere Review-Artikel über Gitter(eich)theorien findet man in [42]).

Zur Vervollständigung und abschließend möchte ich hier noch Folgendes bemerken:

i) Die eingangs erörterte Annahme der Kontinuumsnäherung für die Einteilchenenergieniveaus (vgl.S.73) kann man auch unter dem Aspekt des effektiven Entartungsparameters *Diff* betrachten. Die korrekte Berücksichtigung diskreter Energieniveaus muß sich nämlich ähnlich wie die Projektion auf feste (Farb-)Quantenzahlen auswirken, denn sie besteht ja darin, daß aus einem Kontinuum von freien Einteilchenzuständen nur die abzählbar vielen ausgewählt werden, die gerade die richtigen Randbedingungen für das gegebene Quantisierungsvolumen erfüllen; das wird durch ein numerisches Resultat für eine $SU_c(2)$ -Symmetrie in [22] bestätigt. Mir ist es bisher nicht gelungen, einen adäquaten Projektionsformalismus für dieses Problem zu formulieren.

ii) Für die angestrebte Beschreibung von Kernmaterie als geclusterte Quarkmaterie [43] (vgl.Bem. zum EMC-Effekt S.13) wird es vermutlich notwendig, die Wechselwirkung von zu bestimmten Farb-(Spin- etc.)Quantenzahlen gekoppelten Quark-Glue-Clustern zu berücksichtigen. Es soll kurz angedeutet werden, daß die von mir vorgestellte Projektionsmethode (bei endlicher Temperatur) dabei hilfreich sein könnte. Wenn man in der Projektionsformel für Color-Singlett-Zustände, Glg.(3.83), anstelle der Darstellung (0,0) wieder allgemein (P,Q) einsetzt, erhält man sogleich die Projektionsformel für ein beliebiges $SU_c(3)$ -Multiplett, d.h. für einen zu der entsprechenden Darstellung gekoppelten "Cluster" von Quarks und Gluonen bei endlicher Temperatur. Prinzipiell steht nichts dem im Wege, zusätzlich auch etwa auf feste Spin- und Isospinquantenzahlen zu projizieren. - In Fig.13 erkennt man, wie sich verglichen mit der Color-Singlettdarstellung die Projektion auf die beiden fundamentalen Triplettdarstellungen (1,0) und (0,1) (Quarks/Antiquarks) bzw. die Oktettdarstellung (1,1) (Gluonen) gemessen an *Diff* auswirkt. Für zwei solchermaßen charakterisierte Cluster/Tröpfchen könnte man jetzt eine zusätzliche Wechselwirkungsenergie berücksichtigen, die

aus der Farbwechselwirkung der Quarks und Gluonen zu berechnen wäre (wegen farbiger 3-Quark-Cluster siehe z.B. [44] und Referenzen darin).

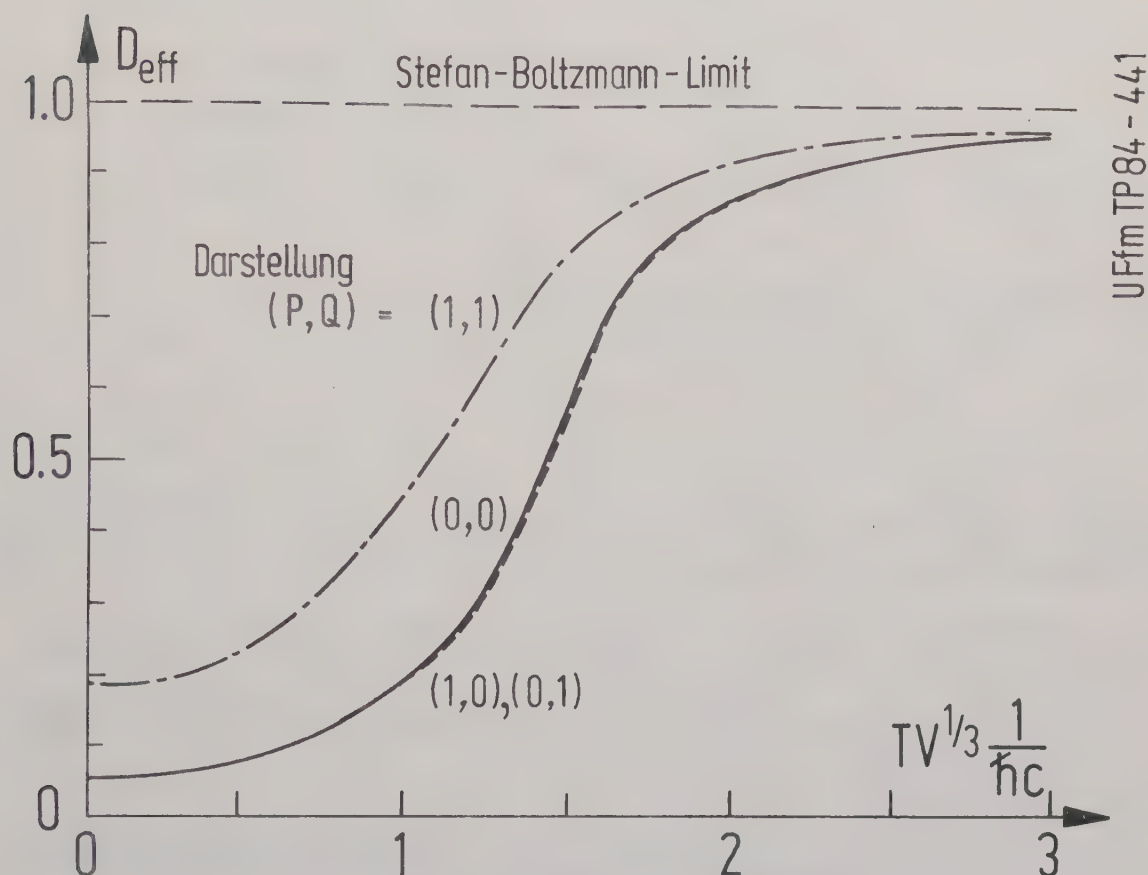


Fig.13 D_{eff} bei Projektion auf die (Anti-)Triplet- oder Oktettdarstellung im Vergleich mit D_{eff} ($P=Q=0$)

Näherungsweise analytische Berechnung der Zustandssumme für ein farbloses Quark-Gluon-Plasma.

Für spätere Anwendungen der im vorigen Abschnitt diskutierten numerischen Resultate - d.h. insbesondere bei der Untersuchung, welchen Einfluß die Farblosigkeitseffekte (I-V) auf das Erscheinungsbild von Quark-Gluon-Plasmatröpfchen haben könnten - wird es sehr nützlich sein, näherungsweise gültige, analytische Ausdrücke für die Zustandssumme $Z_{(0,0)}$, Glg.(3.83), zu kennen. In diesem Abschnitt werde ich zu diesem Zweck die Gruppenintegrale

zunächst mit der Sattelpunktmethode auswerten. Anschließend soll versucht werden, das Ergebnis zu einer qualitativ nicht nur im asymptotischen Bereich gültigen Näherung zu verbessern. (Sei im Folgenden wieder o.B.d.A. $B=0$.)

A) Die Sattelpunktsnäherung (Gaußsche Approximation).

Ausgehend von Glg.(3.83) und mit $\mathcal{Z}$ gemäß Glgen.(3.89-91) sieht man unmittelbar, daß der Integrand sein absolutes Maximum bei $\alpha_{ij} = \alpha_{ij} = 0$ (i.e. $\Phi = \Psi = 0$) einnimmt - man betrachte dazu auch Fig.7 für $\mu_2 = 0$! Wenn man sich in der Φ, Ψ -Ebene von der Maximalstelle entfernt, so fällt der Integrand wie $\exp[-O(\Phi^2) + O(\Psi^2) + O(\Phi\Psi)]$ ab, wird also mit einer quadratischen Funktion im Exponenten unterdrückt. Aus Glg.(3.91) erkennt man, daß der Abfall durch einen endlichen Wert von $\beta\mu_2$ verstärkt wird. Entwickelt man daher die Maßfunktion und die Funktionen im Exponenten der generierenden Funktion bis zu Termen, die quadratisch in den Winkeln sind, so erhält man näherungsweise zunächst:

$$\begin{aligned}
 (3.104) \quad \mathcal{Z}_{(0,0)} &\approx \frac{8}{3\pi^2} \mathcal{Z}^{(0)} \iint_{-\pi}^{\pi} d(\frac{\Phi}{2}) d(\frac{\Psi}{3}) \cdot \frac{1}{16} (\frac{\Phi}{2})^2 (\Psi^2 - (\frac{\Phi}{2})^2)^2 \\
 &\quad \cdot \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ d_A \sum_{i=r,g,b} (-1) (1 + 3(\frac{\beta\mu_i}{\pi})^2) (\frac{\alpha_{ij}}{\pi})^2 \right. \\
 &\quad \left. + d_G \sum_{j=\lambda,\mu,\nu} \left(-\frac{1}{2} + (\frac{\alpha_{ji}}{\pi} - 1)^2 - \frac{1}{2} (1 - 4\frac{\alpha_{ji}}{\pi} + 6(\frac{\alpha_{ji}}{\pi})^2) \right) \right\} \\
 &\stackrel{(3.29)}{=} \frac{1}{6\pi^2} \mathcal{Z}^{(0)} \iint_{-\pi}^{\pi} d(\frac{\Phi}{2}) d(\frac{\Psi}{3}) (\frac{\Phi}{2})^2 (9(\frac{\Psi}{3})^2 - (\frac{\Phi}{2})^2)^2 \\
 &\quad \cdot \exp -\frac{VT^3}{6} \left\{ d_A (1 + 3(\frac{\beta\mu_i}{\pi})^2) + 6d_G \right\} ((\frac{\Phi}{2})^2 + 3(\frac{\Psi}{3})^2) \\
 &\approx \frac{\mathcal{Z}^{(0)}}{6\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy x^2 (9y^2 - x^2)^2 \exp -\frac{VT^3}{6} \left\{ d_A (1 + 3(\frac{\beta\mu_i}{\pi})^2) + 6d_G \right\} (x^2 + 3y^2)
 \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die Integrationsgrenzen im Sinne der Sattelpunktsnäherung verändert wurden, $x, y \rightarrow \pm\infty$;

wenn VT^3 hinreichend groß ist, dann ändert sich dadurch wegen des quadratisch exponentiellen Abfalls des Integranden der Wert des Integrals nicht.

Unter der Voraussetzung $VT^3 \gg 1$ ist somit eine analytisch auswertbare Integraldarstellung für $Z_{(0,0)}$ gefunden [16,27], da es sich um Gaußsche Integrale handelt [36]:

$$\begin{aligned}
 (3.105) \quad Z_{(0,0)}^{VT^3 \gg 1} &\cong \frac{Z^{(0)}}{6\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (x^6 - 18x^4y^2 + 81x^2y^4) \\
 &\quad \cdot \exp - \underbrace{\frac{VT^3}{c} \left\{ d_a \left(1 + 3 \left(\frac{\beta \mu_q}{\pi} \right)^2 \right) + 6d_g \right\}}_{\equiv a} (x^2 + 3y^2) \\
 &= \frac{Z^{(0)}}{6\pi^2} 4 \left\{ \frac{15\pi^7}{16a^{7/2}} \cdot \frac{\pi^7}{2(3a)^{1/2}} - 18 \frac{3\pi^7}{8a^{5/2}} \cdot \frac{\pi^7}{4(3a)^{3/2}} + 81 \frac{\pi^7}{4a^{3/2}} \cdot \frac{3\pi^7}{8(3a)^{5/2}} \right\} \\
 &= \frac{Z^{(0)}}{2\pi T^3} \left\{ VT^3 \left(\frac{da}{c} \left(1 + 3 \left(\frac{\beta \mu_q}{\pi} \right)^2 \right) + d_g \right) \right\}^{-4} \equiv Z_{(0,0)}^S.
 \end{aligned}$$

$Z^{(0)}$, Glg.(3.90), stellt hierbei wieder den Stefan-Boltzmann-Grenzfall dar für $VT^3 \rightarrow \infty$, denn die (Farblosigkeits-) Korrekturen zeigen den durch die eckige Klammer beschriebenen Charakter von Potenzen endlicher Ordnung; bis auf einen unwesentlichen Vorfaktor $1/3$ wurde dieses Resultat der Sattelpunktsnäherung unabhängig auch in Ref.[45] gefunden. Aus der Herleitung von Glg.(3.105) erkennt man, daß die Gaußsche Approximation des Integranden sowohl für $VT \gg 1$ als auch für $\beta \mu_q \gg 1$ gültig sein sollte, d.h. i) für den Grenzfall großen Volumens und/oder hoher Temperatur, und ii) für den Grenzfall hoher Baryonenzahldichte (für ein ideales Quark-Glue-Plasma gilt [35]: $S/T^3 \sim \beta \mu_q (\beta \mu_q^2 + \pi^2)$).

B) Eine qualitative Näherungsformel für $Z_{(0,0)}$.

Man kann die generierende Funktion $\tilde{Z}$ gemäß Glg.(3.82) folgendermaßen umschreiben:

$$\tilde{Z} = \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ d_a \sum_{i=1,9,6} \left(\frac{7}{30} - \frac{(\alpha_i \tilde{\omega})^2}{\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_i \tilde{\omega}}{\pi} \right)^4 \right) + \dots \right.$$

$$\begin{aligned}
& \dots + d_Q \sum_{i=r,g,b} \left(-3 \left(\frac{\alpha_{\bar{i}}}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 - 2i \left(\frac{\alpha_{\bar{i}}}{\pi} \right)^3 \frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right) \\
& + 3d_Q \left(\left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^4 \right) \\
& + d_G \sum_{j=\lambda,\mu,\nu} \left(-\frac{7}{30} + \left(\frac{\alpha_{\bar{j}}}{\pi} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\bar{j}}}{\pi} - 1 \right)^4 \right) \\
& + d_G \cdot \frac{8}{30} \Bigg\} \\
& \cong \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ \frac{7}{30} d_Q \sum_{i=r,g,b} \cos \alpha_{\bar{i}} + \frac{8}{30} d_G \sum_{j=\lambda,\mu,\nu} \cos \alpha_{\bar{j}} \right. \\
& + 3d_Q \left(\left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^4 \right) + \frac{8}{30} d_G \\
& \left. + \frac{6}{\pi^2} d_Q \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 \sum_{i=r,g,b} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \alpha_{\bar{i}}^2 \right)}_{\cong \cos \alpha_{\bar{i}}} - 3 \cdot \frac{6}{\pi^2} d_Q \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 \right\} \\
& = \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ 3d_Q \left(\left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^4 \right) + \frac{8}{30} d_G \right. \\
& \left. + d_Q \left(\frac{7}{30} + \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 \right) \sum_{i=r,g,b} \cos \alpha_{\bar{i}} + \frac{8}{30} d_G \sum_{j=\lambda,\mu,\nu} \cos \alpha_{\bar{j}} \right\},
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung von der bereits in Fig.7 angedeuteten Möglichkeit Gebrauch gemacht wurde, daß die Exponenten der generierenden Funktion (für $\mu_q=0$) durch geeignet normierte Cos-Funktionen approximiert werden können; die Zusatzterme für $\mu_q \neq 0$ wurden explizit hingeschrieben, die oszillierenden Faktoren bzw. rein imaginären Summanden im Exponenten wurden der Einfachheit halber vernachlässigt (bei der Sattelpunktsnäherung fielen sie als Terme höherer Ordnung nicht ins Gewicht).

Benutzt man jetzt wieder die Fourier-Bessel-Entwicklung wie in Kap.1 (siehe z.B. nach Glg.(1.9)), dann findet man $\mathcal{Z}$ in qualitativer Näherung, mit:

$$(3.106) \quad X \equiv \frac{\pi^2}{12} VT^3 d_Q \left(\frac{7}{30} + \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\beta_{\mu q}}{\pi} \right)^2 \right), \quad Y \equiv \frac{\pi^2}{12} VT^3 d_G \cdot \frac{8}{30},$$

$$(3.106') \quad \tilde{Z} \cong \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ 3d_q \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta_{qu}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{qu}}{\pi} \right)^4 + \frac{8}{30} d'_q \right\} \\ \cdot \prod_{i=r,g,b} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{I}_m(x) e^{im\alpha_i} \right) \prod_{j=\lambda,\mu,\nu} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{I}_n(y) e^{in\alpha_j} \right).$$

Nach Glg.(3.83) erhält man dann $Z_{(0,0)}$ durch:

$$(3.107) \quad Z_{(0,0)} = \int_{SU(3)} d\varphi d\psi M(\varphi, \psi) \tilde{Z}(\varphi, \psi)$$

$$(3.106) \quad = \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ 3d_q \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta_{qu}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{qu}}{\pi} \right)^4 + \frac{8}{30} d'_q \right\} \\ \cdot \sum_{\substack{k,l,m=-\infty \\ r,g,b}}^{\infty} \bar{I}_k(x) \bar{I}_l(x) \bar{I}_m(x) \bar{I}_r(y) \bar{I}_g(y) \bar{I}_b(y) \\ \cdot \frac{8}{3\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\left(\frac{\varphi}{3}\right) d\left(\frac{\psi}{3}\right) M(\varphi, \psi) e^{i(k\alpha_r + l\alpha_g + m\alpha_b + r\alpha_\lambda + g\alpha_\mu + b\alpha_\nu)}.$$

Es ist klar, daß die (2-dim.) Gruppenintegration mehrere Paare von Kronecker- δ -Funktionen liefern würde, die Interferenzen zwischen den verbleibenden vier Summationen bewirken (vgl. für den Fall einer $SU(2)$ -Symmetrie Glg.(2.28) !). Da die übriggebliebenen Summen aber nicht analytisch ausgeführt werden können, besteht der letzte Näherungsschritt darin, die Color-Singlett-Zustandssumme durch den größten Term dieser Reihen darzustellen:

$$(3.108) \quad Z_{(0,0)} \cong \exp \frac{\pi^2}{12} VT^3 \left\{ 3d_q \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta_{qu}}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{qu}}{\pi} \right)^4 + \frac{8}{30} d'_q \right\} \\ \cdot \left(\bar{I}_0(x) \bar{I}_0(y) \right)^3 \equiv Z_{(0,0)}^{qu},$$

unter Verwendung von: $\int_{SU(3)} d\varphi d\psi M(\varphi, \psi) e^{i \cdot 0} = 1,$

siehe Glg.(3.23); die Näherung beruht hier darauf, daß die Bessel-Funktionen I_n rasch mit dem Index n fallen, näherungsweise gilt nämlich [4]:

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} \cong 1 - e^{-x/2(n+1)}.$$

Um die Güte der beiden näherungsweise gültigen Ausdrücke für $z_{(0,0)}$, Glgen.(3.105,108), zu prüfen, berechnet man etwa den Entartungsparameter D_{eff} , der in Glg.(3.101) definiert wurde:

$$D_{eff}^{S,qu} = \frac{E_{(0,0)}^{S,qu}}{E^{(0)}}.$$

Es gilt:

$$(3.109) \quad E_{(0,0)}^S \equiv -\partial_\beta \ln z_{(0,0)}^S$$

$$(3.105) \quad -\partial_\beta (\ln z^{(0)} + \ln(VT^3)^{-4}) \stackrel{(3.95)}{=} E^{(0)} - 12T,$$

also mit Glg.(3.97):

$$(3.110) \quad D_{eff}^S = 1 - \left(\frac{\pi^2}{48} VT^3 \left\{ 3d_q \left(\frac{7}{30} + \left(\frac{\beta M}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta M}{\pi} \right)^4 \right) + \frac{16}{15} d_G \right\} \right)^{-1}$$

Ebenso folgt:

$$(3.111) \quad E_{(0,0)}^{qu} \equiv -\partial_\beta \ln z_{(0,0)}^{qu}$$

$$\begin{aligned} (3.108) \quad & \frac{\pi^2}{4} VT^4 \left\{ 3d_q \left(\left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta M}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta M}{\pi} \right)^4 \right) + \frac{8}{30} d_G \right\} \\ & - 3 \left\{ \frac{\partial_\beta I_0(x)}{I_0(x)} + \frac{\partial_\beta I_0(y)}{I_0(y)} \right\} \\ & = \frac{\pi^2}{4} VT^4 \{ \dots \} + 9T \left\{ x \frac{I_1(x)}{I_0(x)} + y \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \right\} \\ & = E^{(0)} - 9T \left\{ x \left(1 - \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \right) + y \left(1 - \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \right) \right\}; \end{aligned}$$

in der dritten Gleichung wurden die Ableitungen der Bessel-Funktionen wie nach Glg.(1.16) in Kap.1 angegeben berechnet, in der letzten Gleichung wurden die expliziten Ausdrücke für x, y und $E^{(0)}$ gemäß Glgen.(3.106,97) zur Umordnung der Terme benutzt. Dann gilt schließlich:

$$(3.112) \quad D_{eff}^{qu} = 1 - \frac{9T}{E^{(0)}} \left\{ x \left(1 - \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \right) + y \left(1 - \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \right) \right\}.$$

Wenn man die asymptotische Entwicklung der Bessel-Funktionen für große Argumente verwendet [5],

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right),$$

erhält man:

$$\begin{aligned} D_{\text{eff}}^{\text{qu}} &= 1 - \frac{9T}{E(\omega)} \left\{ x \left(1 - \frac{1 - 3/8x}{1 + 1/8x} \right) + y \left(1 - \frac{1 - 3/8y}{1 + 1/8y} \right) \right\} \\ &\cong 1 - \frac{9T}{E(\omega)} \left\{ x \frac{4}{8x} + y \frac{4}{8y} \right\} = 1 - \frac{9T}{E(\omega)}, \end{aligned}$$

d.h. man bekommt im Grenzfall $VT \gg 1$ bis auf den konstanten Vorfaktor des Korrekturterms dasselbe Ergebnis wie mit der Sattelpunktmethode, Glg. (3.110).

In den beiden folgenden Figuren 14, 15 werden die verschiedenen Näherungen für D_{eff} im Vergleich mit den exakten numerischen Resultaten aus dem vorigen Abschnitt gezeigt.

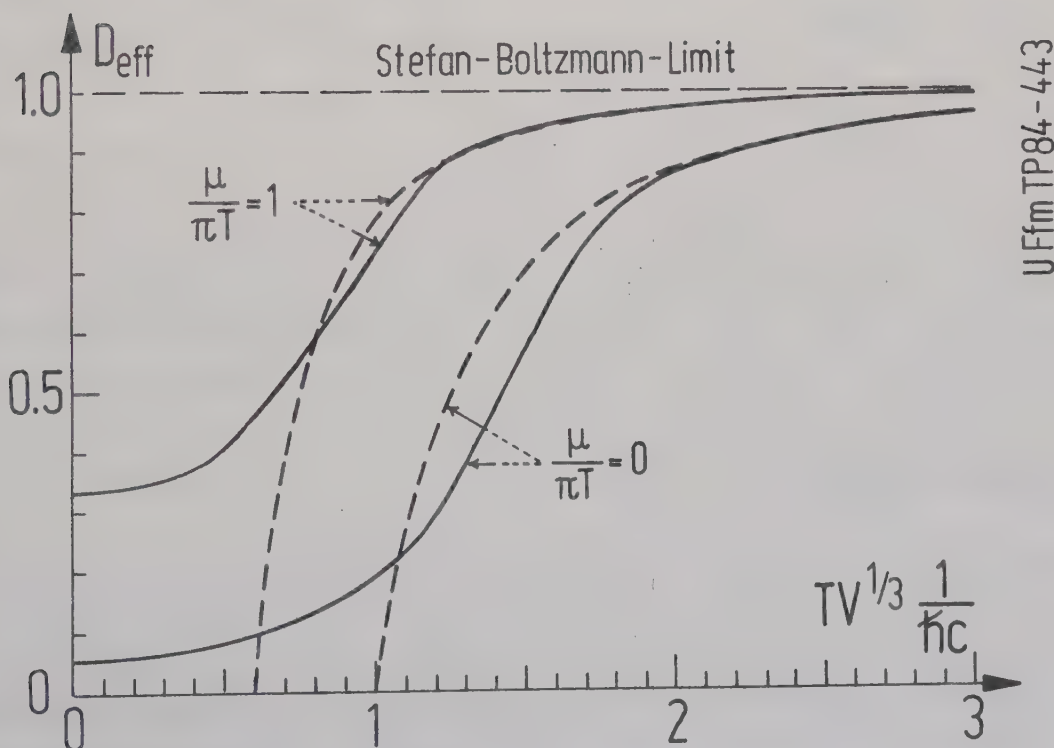
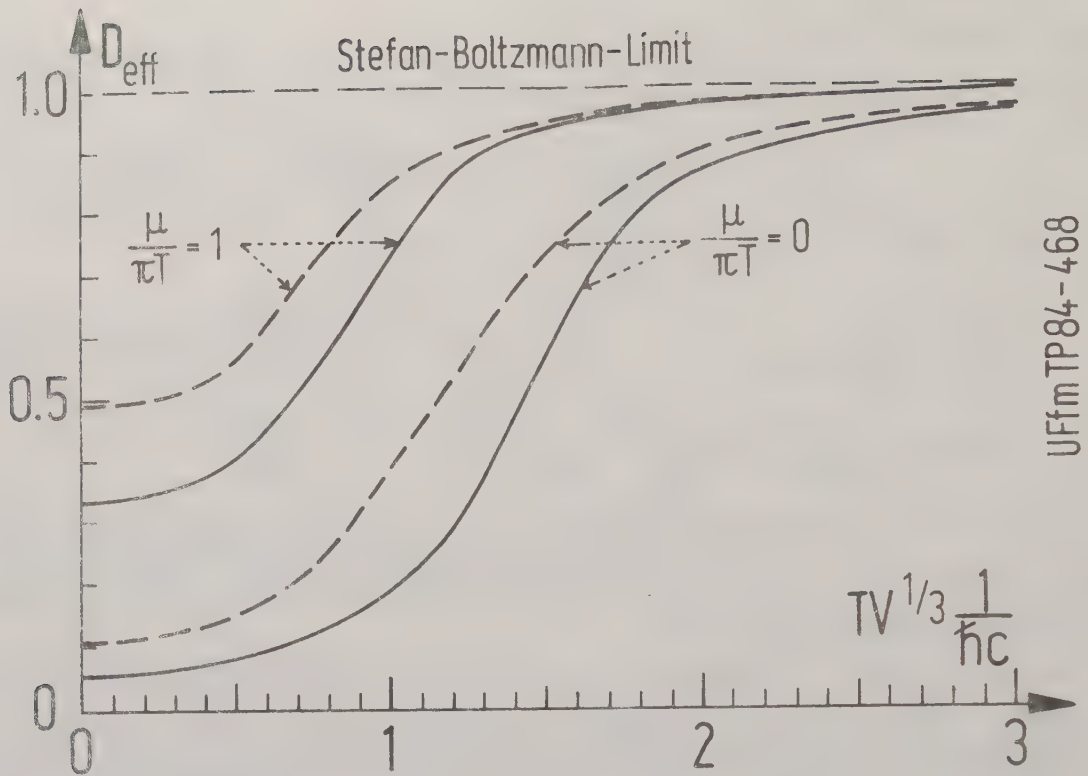


Fig. 14 D_{eff} als Funktion von $TV^{1/3}$; numerisches Resultat (—) vs. Gaußsche Approximation (---)



Uffm TP84-468

Fig.15 D_{eff} als Funktion von $TV^{1/3}$; numerisches Resultat (—) vs. qualitative Näherung (---), Glg.(3.112)

Wie zu erwarten war, verhält sich die qualitative Näherung im asymptotischen Bereich ähnlich wie das mit der Sattelpunktmethode gewonnene Ergebnis und gibt mit einer geringfügig kleineren Genauigkeit das numerische Resultat wieder: darüberhinaus zeigt die qualitative Näherung aber im gesamten Bereich von $TV^{1/3}$ qualitativ das richtige Verhalten!

Nachbemerkung:

Der Effekt V (S.89), daß eine wachsende Quarkdichte den Einfluß der Projektion auf farblose Zustände abschwächt, den man auch in den Näherungsformeln für D_{eff} wiederfindet, Glgen.(3.110,112), läßt sich so verstehen, daß für beliebig hohe bzw. endliche Dichte bei $T \rightarrow 0$ das System durch die Fermi-Verteilung der Quarks bzw. die Slater-Determinante ihrer Einteilchenwellenfunktionen bestimmt wird. Letztere muß als total antisymmetrischer Zustand farblos sein!

4. Quark-Glue-Plasmatröpfchen

Im Folgenden wird untersucht, wie sich die in Kapitel 3 abgeleiteten Effekte der Farblosigkeit - siehe insbesondere I-V in Kap.3.2 (S.86 ff) - auf die Stabilität von isolierten Quark-Glue-Plasmatröpfchen auswirken (Kap.4.1). Außerdem wird in Kap.4.2 ein einfaches (Ising-)Modell für den Phasenübergang zwischen einem Mesonengas und der Plasmaphase vorgeschlagen, das es u.a. ermöglicht, die Bag-Konstante mit einer "Farblosigkeitslänge" zu verknüpfen.

4.1 Der Stabilitätsbereich isolierter Plasmatröpfchen

An seiner Zustandsgleichung, Glg.(3.86), kann man unmittelbar ablesen, daß das Quark-Glue-Plasma keine absolut stabile Form der Materie sein kann: wenn die Gesamtenergiedichte ϵ den kritischen Wert $\epsilon_c = 4B$ unterschreitet, wird der Druck P negativ! Man erwartet auf Grund einer solchen Instabilität den Zerfall des Plasmas in einen räumlich inhomogenen Zustand, i.e. den Übergang zu einer Phase von gebundenen hadronischen Teilchen. Diese Überlegung trifft auf einen endlich großen Plasmatropfen ebenfalls zu.

Falls $P > 0$ gilt, liegt ein komprimierter Plasmatropfen vor, der sich durch radiale Expansion entspannen kann, wie sie in hydrodynamischen Modellen berücksichtigt wird (dazu gibt es zahlreiche Beiträge in den Referenzen [23]). Daneben kann der Überdruck aber auch durch die thermische Abstrahlung von Pionen und in geringerem Maße von schwereren Hadronen an der Tropfenoberfläche und den damit verbundenen Verlust an innerer Energie abgebaut werden [15,22,46,47]. Im Falle $P = 0$ wäre ein einzelner Tropfen mechanisch stabil, wenn man von der thermischen Abstrahlung absieht. Zugleich wird durch $P = 0$ eine Relation zwischen den thermodynamischen Variablen für einen Plasmatropfen definiert, die die Grenze des Bereiches in der μ_q, T -Ebene angibt, in dem die Quark-Glue-Phase überhaupt existieren kann (i.e. $P > 0$) [27]:

$$(4.1) \quad P = 0 \leftrightarrow \epsilon(T, V, \mu_q) = \epsilon_c \equiv 4B ,$$

wegen Glq.(3.86). Die Energiedichte in einem farblosen Plasmatröpfchen erhält man mit Hilfe der Glgen.(3.97,1o1):

$$(4.2) \quad \epsilon \equiv \frac{\epsilon_{(00)}}{V} + B = T^4 f\left(\frac{\beta\mu_q}{\pi}\right) D_{\text{eff}}\left(TV^{1/3} \frac{\beta\mu_q}{\pi}\right) + B,$$

wobei die jeweils vorkommenden Kombinationen bzw. Potenzen der thermodynamischen Variablen explizit hingeschrieben sind. Man findet so bei gegebenem Volumen V und mit einer Skalierung,

$$V^{1/3} \rightarrow V^{1/3} B^{1/4} \equiv V',$$

$$T \rightarrow TB^{-1/4} \equiv T',$$

$$\mu_q \rightarrow \mu_q B^{-1/4} \equiv \mu_q',$$

eine von der Wahl der Bag-Konstante unabhängige "Phasengrenzkurve":

$$(4.3) \quad \mu_q' = \mu_q'(T') \big|_{P=0, V'=\text{const}}.$$

In Fig.16 ist das Resultat einer numerischen Lösung von Glq.(4.1) wiedergegeben in der in Glq.(4.3) angegebenen Form. Der entsprechende (volumenunabhängige) Ausdruck für den Stefan-Boltzmann-Grenzfall bzw. unter Berücksichtigung der perturbativen QCD-Wechselwirkungen in erster Ordnung in α_s lautet nach Glq.(3.97) und Glq.(4.1):

$$(4.4) \quad \mu_q' = \left(-\frac{b}{2c} T'^2 + \left(\left(\frac{b}{2c} T'^2 \right)^2 - \frac{a T'^4}{c} \right)^{1/2} \right)^{1/2},$$

mit,

$$a \equiv \frac{\pi^2}{4} \left(2 \cdot 3 \cdot d_q \cdot \frac{7}{60} C_1 + 8 \cdot d_q \cdot \frac{8}{60} C_3 \right),$$

$$b \equiv \frac{\pi^2}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot d_q \cdot \frac{1}{2\pi^2} C_2,$$

$$c \equiv \frac{\pi^2}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot d_q \cdot \frac{1}{4\pi^2} C_2,$$

und $c_{1,2,3}$ wie in Glq.(3.98). - Vergleicht man anhand von Fig.16 den Stefan-Boltzmann-Grenzfall, die Kurve für $\alpha_s = .5$ und den Einfluß der Projektion auf farblose Zustände für verschieden große Plasmatröpfchen, so wird hier ganz besonders die quantitative Bedeutung der Farblosigkeit bei endlichem Volumen für die Plasmaeigenschaften an der Phasen-

grenze deutlich. Sei jetzt die Bag-Konstante $B^{1/4} \approx 180 \text{ MeV}$ gewählt - eher niedrigere Werte werden für die Hadronenspektroskopie im Rahmen verschiedener Bag-Modelle benutzt und höhere Werte im Zusammenhang mit QCD-Gitterrechnungen genannt [14,15] - dann erkennt man aus Fig.16, daß bei einem Tröpfchenradius $R \approx 3 \text{ fm}$ ($V^{1/3} B^{1/4} \approx 870 \text{ MeV fm}$) ein Plasmatröpfchen mit $P \approx 0$ näherungsweise durch die Stefan-Boltzmann-Statistik beschrieben werden kann, wenn man die perturbativen Wechselwirkungen vernachlässigt.

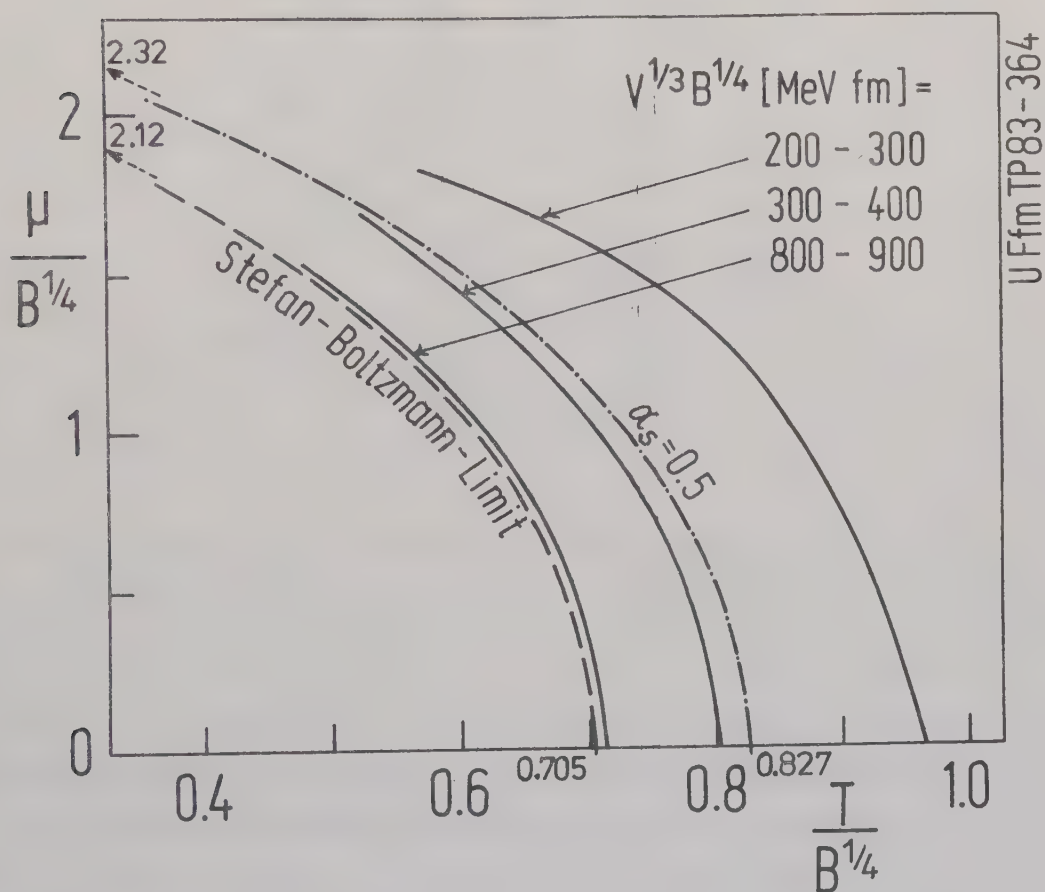


Fig.16 Die Phasengrenzkurve ($P=0$) gem. Glg.(4.3) für isolierte Plasmatröpfchen mit $V^{1/3}$ als Parameter (vgl. Stefan-Boltzmann-Grenzfall bzw. QCD- $O(\alpha_s)$)

Wenn aber der Radius eines Tröpfchens nur noch in der Größenordnung $R \approx 1 \text{ fm}$ ($V^{1/3} B^{1/4} \approx 290 \text{ MeV fm}$) liegt, dann muß man mit Korrekturen von 30% und mehr z.B. in der Druck-

-Temperatur- oder Druck-Dichte(μ_q)-Beziehung rechnen. -

Solche Endliches-Volumen-Effekte sollten also bei einer realistischen Studie des (Plasma-)Keimbildungsprozesses und der Zerfallseigenschaften von Plasmatropfen berücksichtigt werden (vgl. [15,22,29] und Referenzen darin). Eine Modellbetrachtung wird dazu in Kap.4.2 durchgeführt.

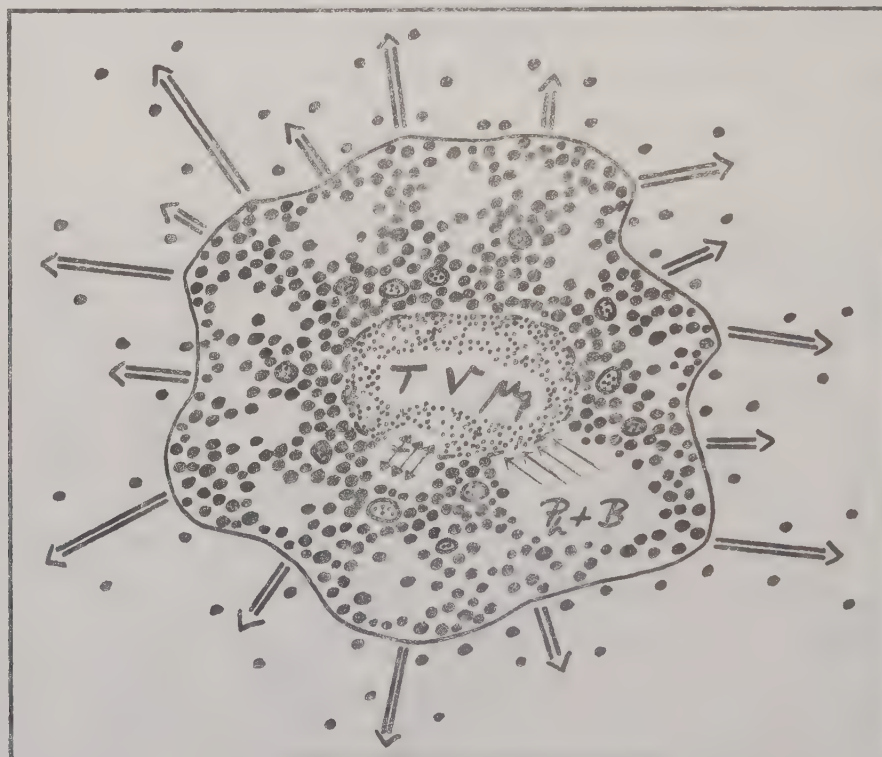


Fig.17 Ein Plasmatropfen in einem "Feuerball" von hadronischer Materie nach einer Schwerionenkollision zusammen mit weiteren Plasmakeimen (Austausch v. Energie, Baryonenlad. usw. ü. d. Phasengrenze, äußerer Druck u. hydrodyn. Fluß sind durch Pfeile angedeutet)

Man kann allerdings nicht erwarten, daß etwa ein in einer relativistischen Schwerionenkollision entstandener Plasmatropfen, wie er in Fig.17 in einer heißen/komprimierten Umgebung von hadronischer Materie und weiteren Plasmakeimen gezeigt ist, den bisher betrachteten, entspannten Zustand mit $P=0$ einnimmt. Der zusätzliche äußere Druck P_h der hadronischen Materie läßt ihn schon vor Erreichen der Phasengrenze gemäß Glg.(4.3) instabil werden ebenso wie zusätzliche Spaltprozesse.

4.2 Ein Tröpfchenmodell des Phasenübergangs zwischen Mesonengas und Quark-Glue-Plasma

Im vorhergehenden Abschnitt wurde erörtert, daß das Quark-Glue-Plasma als eigener Aggregatzustand der Materie instabil wird, wenn seine Energiedichte einen gewissen kritischen Wert unterschreitet. Umgekehrt stellt man die Frage, ob sich die uns bekannte hadronische Materie tatsächlich unter bestimmten Bedingungen in eine asymptotisch wechselwirkungsfreie Phase von Quarks und Gluonen umwandelt. Im Falle eines Phasenübergangs ergeben sich einerseits Konsequenzen für die Geschichte der Anfangszeit des Kosmos (z.B. [48] und Referenzen darin) und für den Aufbau von Sternen [28]. Andererseits lassen sich daran Überlegungen knüpfen, ob und wie man die Plasmaphase beobachten kann, die man experimentell in hochenergetischen Schwerionenkollisionen zu erzeugen versucht [15,22,23].

Um charakteristische Eigenschaften der Materie in der Nähe des angenommenen Phasenübergangs herauszufinden, ist es notwendig, phänomenologische Modelle zu betrachten; lediglich sehr aufwendige numerische Gitterrechnungen ermöglichen es bisher (in begrenztem Maße), von der QCD ausgehend Quark-Glue-Systeme zu simulieren, um so u.a. ihr thermodynamisches Verhalten kennenzulernen.

Basierend auf der Untersuchung der besonderen Eigenschaften kleiner, farbloser Quark-Glue-Plasmatröpfchen in Kap.3.2 - insbesondere der Volumenabhängigkeit der Anzahl ihrer inneren Freiheitsgrade - läßt sich ein einfaches Tröpfchenmodell für einen Phasenübergang erster Ordnung zwischen einem Mesonengas und der Quark-Glue-Plasmaphase konstruieren. Dazu wird von den komplexen Verhältnissen abgesehen, wie sie bei der Erzeugung des Plasmas im Experiment bestehen (vgl. Fig.17) und ein (im thermodynamischen Grenzfall) unendlich ausgedehntes System beschrieben. Weiterhin mache ich die folgenden Annahmen über die Dynamik des Systems bei hohen Temperaturen ($T \approx 180 \text{ MeV}$) in der Nähe des Phasenübergangs:

A Der "wahre" Vakuumzustand der QCD läßt lokalisierte, farblose Anregungen zu, u.a. Mesonen; für die Ausbildung des auf diese Weise angeregten Vakuumzustands ist insbesondere wegen der endlichen Ausdehnung der Anregungen ein gewisses Volumen λ_M^3 notwendig (s.u.).

B Bei endlicher Temperatur (Baryonenzahldichte) kann der Vakuumzustand lokal zerstört und durch das sogenannte "perturbative" Vakuum verdrängt werden, das über Bereiche von der Größe $\lambda^3 (> 1\text{fm}^3)$ ausgedehnt ist. Solche Zellen werden als Quark-Glue-Plasmatröpfchen wie in Kap.3 behandelt, wobei λ zugleich die mittlere Entfernung angibt, über die Quarks und Gluonen zu farblosen Zuständen gekoppelt sind.

Diese beiden Annahmen stimmen mit gegenwärtigen Vorstellungen von langreichweitig stark wechselwirkenden Quarks und Gluonen und ihrem gebundenen Vakuumzustand überein. - Von nun an betrachte ich den Fall verschwindender Baryonenzahldichte ($\mu_Q=0$), da es um ein mögliches Modell für den Phasenübergang überhaupt geht, welches dann mutatis mutandis auch auf den Fall $\mu_Q \neq 0$ übertragen werden kann.

Um die freie Energie und damit weitere thermodynamische Zustandsgrößen eines makroskopischen Systems zu berechnen, das verschiedene räumlich inhomogene Zustände einnehmen kann, ist eine korrekte Abzählung bzw. Wichtung einzelner Konfigurationen notwendig. Ich schlage dazu den in den Fig.18a-c veranschaulichten Weg vor. Fig.18a zeigt einen beliebigen Ausschnitt des physikalischen Systems mit lokalisierten (mesonischen) Anregungen und den (schraffierten) Bereichen, die von der Quark-Glue-Plasmaphase eingenommen werden. Fig.18b gibt dergleichen Ausschnitt wieder mit einer Verteilung von (im Gesamtsystem N) fiktiven Punkten, die zur Abzählung und Wichtung der Konfigurationen eingeführt werden; die Verteilung soll im Großen (für Entfernungen $\gg \lambda, \lambda_M$) eine konstante Dichte mit einem mittleren Abstand der Punkte in der Größenordnung von λ, λ_M aufweisen. Sie muß aber nicht notwendigerweise ein regelmäßiges

Raumgitter erzeugen. Eher ist an die Momentaufnahme der Verteilung von Atomen in einer Flüssigkeit zu denken mit einer gewissen Nahordnung, deren Bedeutung hier gleich noch deutlicher werden wird. An jedem einzelnen Punkt i der willkürlich gesetzten Verteilung kann (fiktiv) entschieden werden, ob er sich in der Plasmaphase befindet ($\sigma_i \equiv 1$), oder ob er zu dem (mesonisch) angeregten Vakuum gehört ($\sigma_i \equiv 0$). Die beiden Annahmen A und B werden jetzt in Form einer Art Nächste-Nachbar-Wechselwirkung zwischen benachbarten Punkten realisiert: wenn zwei "nächstbenachbarte" Punkte derselben Phase angehören - man sie also wie in Fig.18c durch ein "Link" verbinden kann, genau dann wird ein diesem Link zugeordneter Beitrag zur freien Energie einer bestimmten Gesamtkonfiguration gezählt; der Beitrag ist derjenige der freien Energie eines Plasmatröpfchens vom Volumen λ^3 in der Plasmaphase (siehe B) und eines Mesonengases (s.u.) vom Volumen λ_M^3 in der mesonisch angeregten Phase (siehe A). Als nächste Nachbarn eines Punktes sollen dabei eine durch die Koordinationszahl c festgelegte maximale Anzahl von Punkten gelten, die zu einem gerade betrachteten Punkt räumlich am nächsten liegen.

Der Einfachheit halber, und weil es sich um bisher noch unbestimmte Parameter handelt, wird $\lambda_M \equiv \lambda$ gesetzt; falls $\lambda_M \neq \lambda$ gilt, kann man das System nicht in einem thermodynamischen Ensemble mit festem Gesamtvolumen beschreiben, sondern müßte zu einem solchen mit einem gewissen mittleren Volumen übergehen, dem sogenannten "Druck"-Ensemble, wie es z.B. für die Untersuchung hadronischer Materie im Rahmen des Bootstrap-Modells Verwendung findet [49].

Es sei an dieser Stelle hinzugefügt, daß in den beiden Annahmen A, B u.a. zum Ausdruck kommt, daß eine Lokalisierung der Anregungen auf kleinere als die angenommenen Volumina energetisch zu ungünstig wäre, bzw. daß auch ein (über-) dicht gepacktes Mesonengas den gebundenen Vakuumzustand (zer-)stört. Hierbei könnte das Modell verbessert werden, indem man die Endliches-Volumen-Korrekturen aufgrund der diskreten Einteilchenenergieniveaus berücksichtigt.

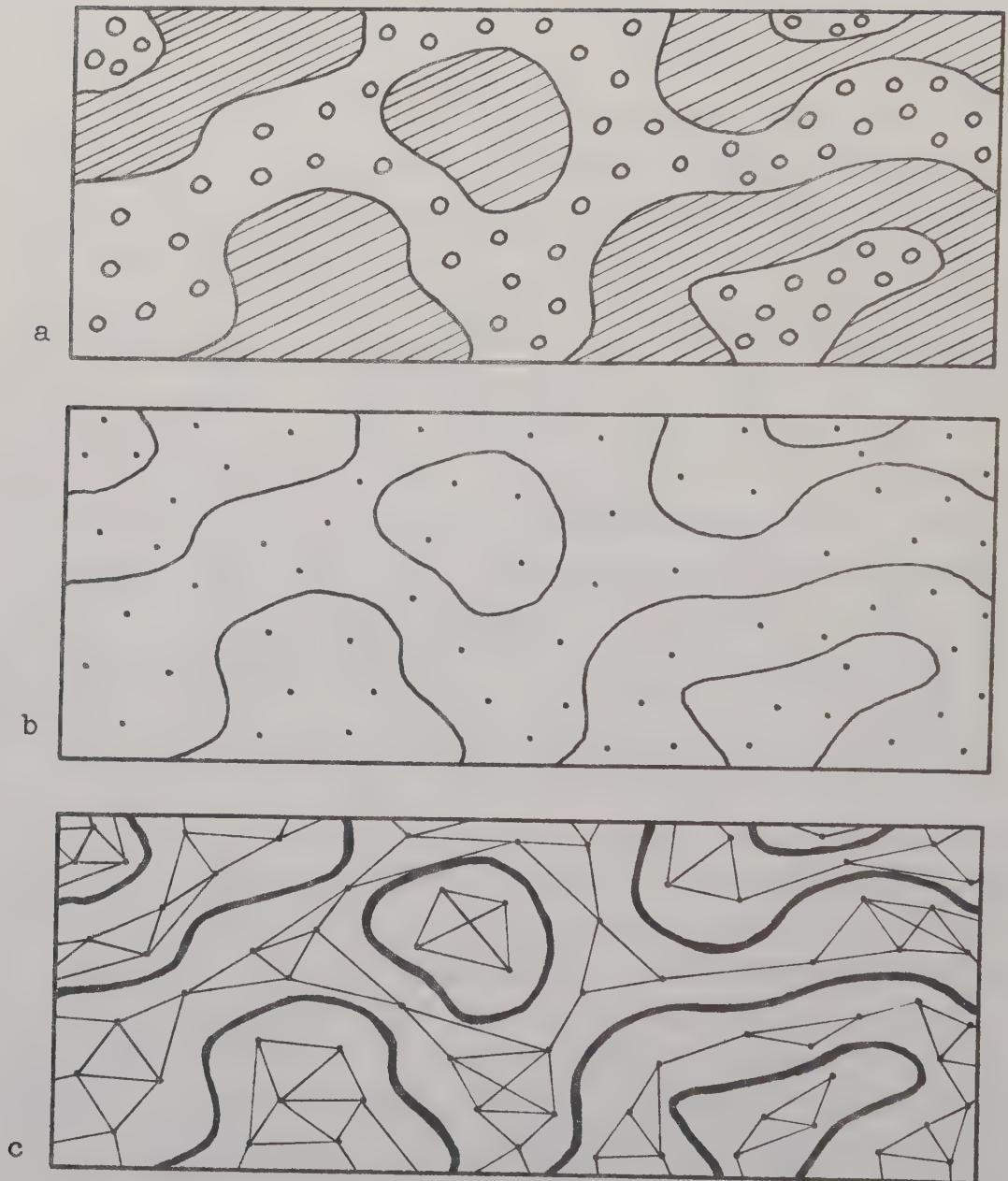


Fig.18a-c Schritte zu einer korrekten Abzählung und Wichtung räumlich inhomogener Konfigurationen des Tröpfchenmodells (Erläuterungen im Text S.106ff)

Die Annahme einer "Farblosigkeitslänge" λ (B) ist in Zusammenhang mit der Bemerkung am Ende von Kap.3.2 (ii), S.92) zu sehen, daß nämlich Quarks und Gluonen über endliche Entfernungen vermutlich (energetisch) bevorzugt zu Clustern mit bestimmten Spin-, Flavour- und Color-Quantenzahlen gekoppelt sind [50,51]. Hier werden nur farblose Cluster berücksichtigt, deren sonstige Quantenzahlen nur im (großkanonischen) Mittel erhalten werden; dabei kann λ nicht eigentlich eine Konstante sein, sondern eine temperatur- und dichteabhängige Größe. Daß die Variation von λ realistischerweise nicht vernachlässigt werden sollte, wird in den später gezeigten Ergebnissen von Modellrechnungen deutlich. (λ ist nicht mit der aus der Plasmaphysik bekannten Debye-(Abschirm-)Länge zu verwechseln, die die Reaktion eines lediglich coulombartig wechselwirkenden Plasmas etwa auf eine von außen in das System gebrachte (Color-)Probeladung charakterisiert.)

Nach diesen Vorbemerkungen und unter den Annahmen A,B kann man die freie Energie F_σ einer bestimmten Konfiguration hinschreiben, die durch eine Verteilung von "Besetzungszahlen", $\{\sigma_i\}_{i=1,\dots,N}$ ($\sigma_i=0,1$), gegeben ist:

$$(4.5) \quad F_\sigma \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij}^{\text{nn.}} \left\{ f_R \sigma_i \sigma_j + f_M (1-\sigma_i)(1-\sigma_j) \right\},$$

wobei sich die Summe über alle Punkte $i=1,\dots,N$ und ihre jeweiligen nächsten Nachbarn erstreckt; die Beiträge eines Links in der Plasma- ($\propto f_R$) oder der mesonisch angeregten Phase ($\propto f_M$) sind:

$$(4.6) \quad f_R \equiv -T \ln Z_{(q0)}(T, v=\lambda^3, \mu_f=0; B \equiv 0),$$

und,

$$(4.7) \quad f_M \equiv -\frac{12}{90} \pi^2 \lambda^3 T^4.$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß in Glg.(4.6) in der Color-Singlett-Zustandssumme gemäß Glg.(3.92) B $\equiv$ 0 gesetzt wurde - die Existenz zweier unterschiedlicher Vacua mit ihren Anregungen wird ausschließlich durch die beiden

Annahmen A, B repräsentiert! Ferner ist zu erwähnen, daß die mesonischen Anregungen in Glg.(4.7) als ideales Bose-Gas von näherungsweise masselosen Bosonen mit einer relativ willkürlich gewählten Zahl von zwölf inneren Freiheitsgraden behandelt werden (vgl. den gluonischen Anteil von 2^{ω} , Glg.(3.90), mit $8d_G \rightarrow 12$). Die relativ hohe innere Entartung wurde angenommen, weil neben den sicher dominanten Pionen mit drei inneren Isospinfreiheitsgraden noch andere Anregungen eine Rolle spielen können; außerdem liefert das Modell in der gegenwärtigen Form unter Berücksichtigung lediglich der Pionen keine befriedigenden Resultate (s.u.). Durch Glgen.(4.5-7) ist das Modell vollständig definiert.

Es erweist sich im Folgenden als zweckmäßig, eine Variablentransformation durchzuführen:

$$(4.8) \quad \tau_i \equiv 2\sigma_i - 1, \quad$$

so daß also $\tau_i = \pm 1$ gilt. Man erhält dann bei N Punkten mit jeweils c nächsten Nachbarn:

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad \overline{F}_\sigma &\rightarrow \overline{F}_\tau \equiv \overline{F}_{\sigma(\tau)} = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{h,h.} \left\{ \frac{1}{4} t_R (\tau_i + 1)(\tau_j + 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} t_M (\tau_i - 1)(\tau_j - 1) \right\} \\
 &\quad = N \cdot c \\
 &= \frac{t_R + t_M}{8} \sum_{ij}^{h,h.} 1 + c \frac{t_R - t_M}{4} \sum_i \tau_i + \frac{t_R + t_M}{8} \sum_{ij}^{h,h.} \tau_i \tau_j \\
 &= Nc\Delta + c\chi \sum_i \tau_i + \Delta \sum_{ij}^{h,h.} \tau_i \tau_j,
 \end{aligned}$$

wobei Oberflächenkorrekturen $\propto N^{2/3}$ unberücksichtigt blieben, die im thermodynamischen Grenzfall ($N \rightarrow \infty$) vernachlässigbar werden; die Parameter Δ, χ sind definiert durch:

$$(4.10) \quad \Delta \equiv \frac{1}{8} (t_R + t_M), \quad$$

$$(4.11) \quad \chi \equiv \frac{1}{4} (t_R - t_M).$$

Für $T > 0$ gilt wegen der Glgen. (4.6,7) $\Delta < 0$. Man sieht also, daß die obige Variablentransformation die Umschreibung in ein ferromagnetisches ($\Delta < 0$) Ising-Modell mit Nächste-Nachbar-Wechselwirkung bewirkt hat [52], worin χ die Rolle eines äußeren Magnetfeldes spielt und ein zusätzlicher Volumenterm $c\Delta$ auftritt. Die Besonderheit des vorliegenden Modells besteht darin, daß sowohl die Kopplungs"konstante" Δ als auch das "äußere" Magnetfeld χ temperaturabhängig sind und nicht unabhängig vom inneren Zustand des Systems vorgegeben werden können!

Die freie Energie F_N und die Zustandssumme Z_N sind gegeben durch:

$$(4.12) \quad e^{-\beta F_N} \equiv Z_N \equiv \sum_{\{\tau_i\}} e^{-\beta F_{\tau}}.$$

Da F_N einen quadratischen Term enthält, kann die Summe über alle Verteilungen von Ising-Spins, $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, N}$ ($\tau_i = \pm 1$) i.a. nicht geschlossen ausgeführt werden. Im Folgenden verwende ich die Weiss'sche Molekularfeldnäherung (mean field theory) [52]:

$$(4.13) \quad \sum_{ij} h_{ij} \tau_i \tau_j \cong c \langle \tau \rangle \sum_i \tau_i ;$$

dabei bezeichnet $\langle \tau \rangle$ den Erwartungswert für einen beliebigen Spin, der selbstkonsistent zu bestimmen ist. - Man kann eine Zustandssumme von der hier betrachteten Form auch in ein Integral überführen und findet die Weiss'sche Näherung dann als Sattelpunktsnäherung für das Integral [53]; damit läßt sich zeigen, daß diese Näherungslösung des Modells für $c \rightarrow \infty$ ($c\Delta$ endlich) exakt wird. - Mit Glgen. (4.9,13) erhält man Z_N , Glg. (4.12), in der Molekularfeldnäherung:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} Z_N &\cong e^{-\beta N c \Delta} \sum_{\{\tau_i\}} e^{-\beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) \sum_i \tau_i} \\ &= e^{-\beta N c \Delta} \left(\sum_{\tau = \pm 1} e^{-\beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) \tau} \right)^N \\ &= \left(2 e^{-\beta c \Delta} \cosh \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) \right)^N. \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß in die so gewonnene einfachste Näherung für Z_N die räumliche Struktur der anhand von Fig.18 diskutierten Verteilung der N "Zähl- und Wichtungspunkte" nur über die Koordinationszahl c eingeht; erst bei einer genaueren Betrachtung, die lokale Korrelationen zwischen den Spins berücksichtigt (z.B. Bethe-Peierls-Approximation, siehe z.B. [52]) oder auch ein variables λ zuläßt, würde sie wesentlich. - Die freie Energie $\mathcal{F}$ pro "Zähl- und Wichtungspunkt" beträgt dann im thermodynamischen Grenzfall:

$$(4.15) \quad \mathcal{F} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{F}_N}{N} \stackrel{(4.12)}{=} -T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N$$

$$\stackrel{(4.14)}{=} c\Delta - T \ln \left\{ 2 \cosh \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) \right\}.$$

Der Erwartungswert $\langle \tau \rangle$ ("Ordnungsparameter") läßt sich nun wegen der Glgen.(4.9,12) berechnen:

$$(4.16) \quad \langle \tau \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial (-\beta c \chi)} \ln Z_N$$

$$\stackrel{(4.15)}{=} \frac{\partial}{\partial (\beta c \chi)} (\beta \mathcal{F}) = -\tanh \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle),$$

welches zugleich die benötigte Selbstkonsistenzgleichung für $\langle \tau \rangle$ darstellt.

Man bemerkt zunächst, daß Glg.(4.16) für $\chi=0$ neben $\langle \tau \rangle=0$ eine weitere Lösung besitzen kann - sie entspricht der spontan magnetisierten Phase im Ising-Modell; es muß dazu gelten:

$$(4.17a) \quad \chi = 0 \stackrel{(4.11)}{\iff} t_{\mathcal{R}} = t_M \stackrel{(4.67)}{\iff} T \equiv T_{\sigma}(\lambda),$$

und,

$$(4.17b) \quad \sigma \neq \langle \tau \rangle = \tanh(-\beta c \Delta \langle \tau \rangle)$$

$$\implies -\beta c \Delta \stackrel{!}{>} 1, \quad ,$$

denn nur dann können beide Seiten der Selbstkonsistenzgleichung

chung - als Funktionen von $\langle \tau \rangle$ betrachtet - für $\langle \tau \rangle \neq 0$ übereinstimmen (i.e. der Graph der Funktion $\tanh(\alpha x)$ verläuft näher bei der x-Achse als der von αx). Aus der Ungleichung in (4.17b) folgt:

$$T \stackrel{!}{<} T_c \equiv -C\Delta \stackrel{(4.10)}{=} -\frac{C}{8}(t_R + t_M),$$

also auch für $T=T_0$:

$$(4.17c) \quad T_0 \stackrel{!}{<} -\frac{C}{8}(t_R + t_M) \stackrel{(4.17a)}{=} -\frac{C}{4}t_M.$$

Was bedeutet die Forderung, Glg.(4.17c)? - Betrachtet man zuerst ein Ising-Modell mit $\chi=0$ und $\Delta=\text{const}$, dann gibt es für $T>T_c$ wegen (4.17b) nur die Lösung $\langle \tau \rangle=0$, d.h. im Mittel nehmen alle Spins mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte ± 1 an bzw. liegt keine spontane Magnetisierung des Systems vor; hingegen zeigen unterhalb der kritischen Temperatur T_c die Spins in eine bevorzugte Richtung, $\langle \tau \rangle \neq 0$ (spontane Brechung der up/down-Symmetrie). Wenn man zusätzlich für $T<T_c$ ein äußeres Magnetfeld χ einschaltet, dann wird sich die (spontane) Magnetisierung parallel zum äußeren Feld einstellen. Oder: wenn man das äußere Magnetfeld kontinuierlich variiert, dann springt das System bei $\chi=0$ in einem Phasenübergang von der einen Magnetisierungsrichtung in die andere um! In Fig.19 ist ein solches Verhalten schematisch dargestellt. Oberhalb von T_c ändert sich die Magnetisierung stetig mit dem äußeren Feld.

Für das hier vorgeschlagene Tröpfchenmodell bedeutet die Ungleichung (4.17c) also eine Einschränkung der Parameter, so daß bei der Temperatur $T_0<T_c$ ein Phasenübergang stattfindet, der im Folgenden noch genauer untersucht wird:

$$-\frac{C}{4}t_M \stackrel{(4.7)}{=} \frac{\pi^2}{30} C \lambda^3 T_0^4 \stackrel{!}{>} T_0,$$

bzw.,

$$(4.18) \quad C \stackrel{!}{>} \frac{30}{\pi^2} (\lambda T_0)^{-3}.$$

Numerisch findet man (vgl. (4.17a)):

$$(4.19) \quad \chi = 0 \leftrightarrow \lambda T_0 = 1.55 \text{ ("Pionengas": } .69) ,$$

wobei der Wert in der Klammer für ein dem "Pionengas" mit drei inneren Freiheitsgraden entsprechendes f_M gilt - statt der in Glg.(4.7) angenommenen zwölf.

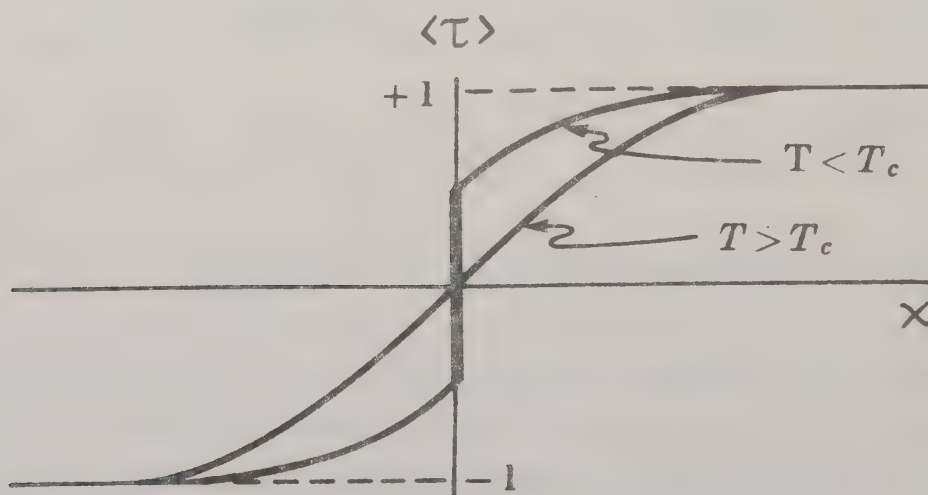


Fig.19 Qualitatives Verhalten des mittleren Spins $\langle \tau \rangle$ in einem ferromagnetischen Ising-Modell in Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld χ (nach Brout, [52])

Aus den Glgen.(4.18,19) folgt also als eine notwendige Bedingung an die Koordinationszahl für das Auftreten eines Phasenübergangs im Tröpfchenmodell:

$$(4.20) \quad c > 1 \text{ ("Pionengas": } 37) .$$

Für das "Pionengas" ergibt sich die extrem hohe Forderung nach mindestens 37 nächsten Nachbarn; allerdings können die entscheidenden numerischen Werte in Glg.(4.19) durch Berücksichtigung weiterer Endliches-Volumen- und Wechselwirkungseffekte in χ bzw. f_{PL} und f_M noch stark verschoben werden, so daß hier noch viel Spielraum für Verbesserungen offen ist.

Das physikalische Gesamtvolumen des Systems beträgt ($N \rightarrow \infty$):

$$(4.21) \quad V \equiv \frac{1}{2} N c \lambda^3 ,$$

denn wegen der Glgen. (4.5-7) wird pro Link ein Beitrag $\propto \lambda^3$ zur freien Energie gezählt; das (konstante) Gesamtvolumen ist also gleich der maximal möglichen Anzahl von Links multipliziert mit dem Volumen pro Link.

Man kann damit das thermodynamische Verhalten anhand von Druck und Energiedichte untersuchen. Für den Druck P gilt:

$$(4.22) \quad P \equiv - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial V} \overline{F}_N \stackrel{(4.15,21)}{=} - \frac{2}{c \lambda^3} \mathcal{F} .$$

Wegen der Analogie zu einem ferromagnetischen Ising-Modell muß man erwarten (vgl. Fig. 19), daß das vorliegende System für $T = T_0 < T_c$ bzw. bei $\chi = 0$ sein Verhalten sprunghaft ändert; tatsächlich ist nämlich unter diesen Bedingungen neben $\langle \tau \rangle \neq 0$ auch $-\langle \tau \rangle$ eine Lösung der Selbstkonsistenzgleichung. Man beachte aber, daß P wegen der Glgen. (4.15, 22) für $\chi = 0$ eine gerade Funktion von $\langle \tau \rangle$ und deshalb der Druck eine stetige Funktion der Temperatur ist.

Anders verhält sich hingegen die Energiedichte ε :

$$(4.23) \quad \varepsilon \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \overline{F}_N) \stackrel{(4.15,21)}{=} \frac{2}{c \lambda^3} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \mathcal{F})$$

$$\stackrel{(4.15)}{=} \frac{2}{\lambda^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \Delta) - \tanh \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \chi + \beta \Delta \langle \tau \rangle) \right\}$$

$$\stackrel{(4.16)}{=} \frac{2}{\lambda^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \Delta) + \langle \tau \rangle \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \chi) + \langle \tau \rangle \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \Delta) + \beta \Delta \frac{\partial}{\partial \beta} \langle \tau \rangle \right) \right\} .$$

Aus Glg. (4.16) folgt zunächst:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \tau \rangle = - \frac{c}{\cosh^2 \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle)} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \chi + \beta \Delta \langle \tau \rangle) ,$$

und daher:

$$(4.24) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \langle \tau \rangle = -c \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \chi) + \langle \tau \rangle \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta \Delta)}{\cosh^2 \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) + \beta c \Delta} .$$

Wenn man Glq.(4.24) in Glq.(4.23) einsetzt, so ergibt sich:

$$(4.25) \quad \varepsilon = \frac{2}{\lambda^2} \left\{ \partial_{\beta}(\beta\Delta) + \langle \tau \rangle \frac{\cosh^2 \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle)}{\cosh^2 \beta c (\chi + \Delta \langle \tau \rangle) + \beta c \Delta} \right. \\ \left. \cdot \left(\partial_{\beta}(\beta\chi) + \langle \tau \rangle \partial_{\beta}(\beta\Delta) \right) \right\} .$$

Der unterstrichene Term ist ungerade in $\langle \tau \rangle$ und verschwindet nicht (wegen der nicht-trivialen Temperaturabhängigkeit von f_{PL} in χ , siehe Glgen.(4.6,11)). Daraus folgt, daß die Energiedichte als Funktion der Temperatur bei $T=T_0$ ($\approx \chi=0$) einen Sprung $\propto (\langle \tau \rangle_{\chi \rightarrow 0+} - \langle \tau \rangle_{\chi \rightarrow 0-})$ aufweist. - Zusammen mit der obigen Aussage über den Druck ist damit für das hier entwickelte Tröpfchenmodell ein Phasenübergang erster Ordnung bei $T=T_0$ nachgewiesen, sofern $T < T_c$ gilt oder äquivalent dazu Glq.(4.20) erfüllt ist.

Wie bereits erwähnt, sind im vorliegenden Modell sowohl das "Magnetfeld" χ als auch die "Kopplungsstärke" Δ temperaturabhängig und können nicht von außen vorgegeben werden. Daher kann man nicht damit rechnen, daß das Phasendiagramm für $\chi \neq 0$ mit dem eines ferromagnetischen Ising-Modells (Fig.19) genau übereinstimmt.

Um das Verhalten im relevanten Temperaturbereich ($T \approx 150 \dots 250 \text{ MeV}$) kennenzulernen, wird die Selbstkonsistenzgleichung numerisch gelöst. Zu diesem Zweck wird die Koordinationszahl $c=6$ ("Pionengas": 45) und die Farblosgkeitslänge $\lambda=1.699 \text{ fm}$ ("Pionengas": .756 fm) gewählt. Aus Glq.(4.19) ergibt sich dann die in den nachfolgenden Figuren markierte Phasenübergangstemperatur $T_0 \approx 180 \text{ MeV}$. - Die Abhängigkeit des Ordnungsparameters $\langle \tau \rangle$ von der Temperatur ist für die beiden betrachteten Fälle in den Fig.20,21 wiedergegeben. Die durchgezogenen Linien zeigen das Gleichgewichtsverhalten des Systems, wohingegen die anderen Abschnitte sich zwar ebenfalls aus Glq.(4.16) ergeben, aber instabilen Zuständen entsprechen; das wird bei der Berechnung des dazugehörigen Drucks klar werden. Der auffälligste qualitative Unterschied zu Fig.19 besteht in dem Ansteigen des mesonischen (pionischen) Astes für kleine Temperaturen -

in Fig.2o setzt der Effekt erst bei viel tieferen als den aufgetragenen Temperaturen erkennbar ein - was dadurch bedingt ist, daß χ und Δ dann betragsmäßig klein werden.

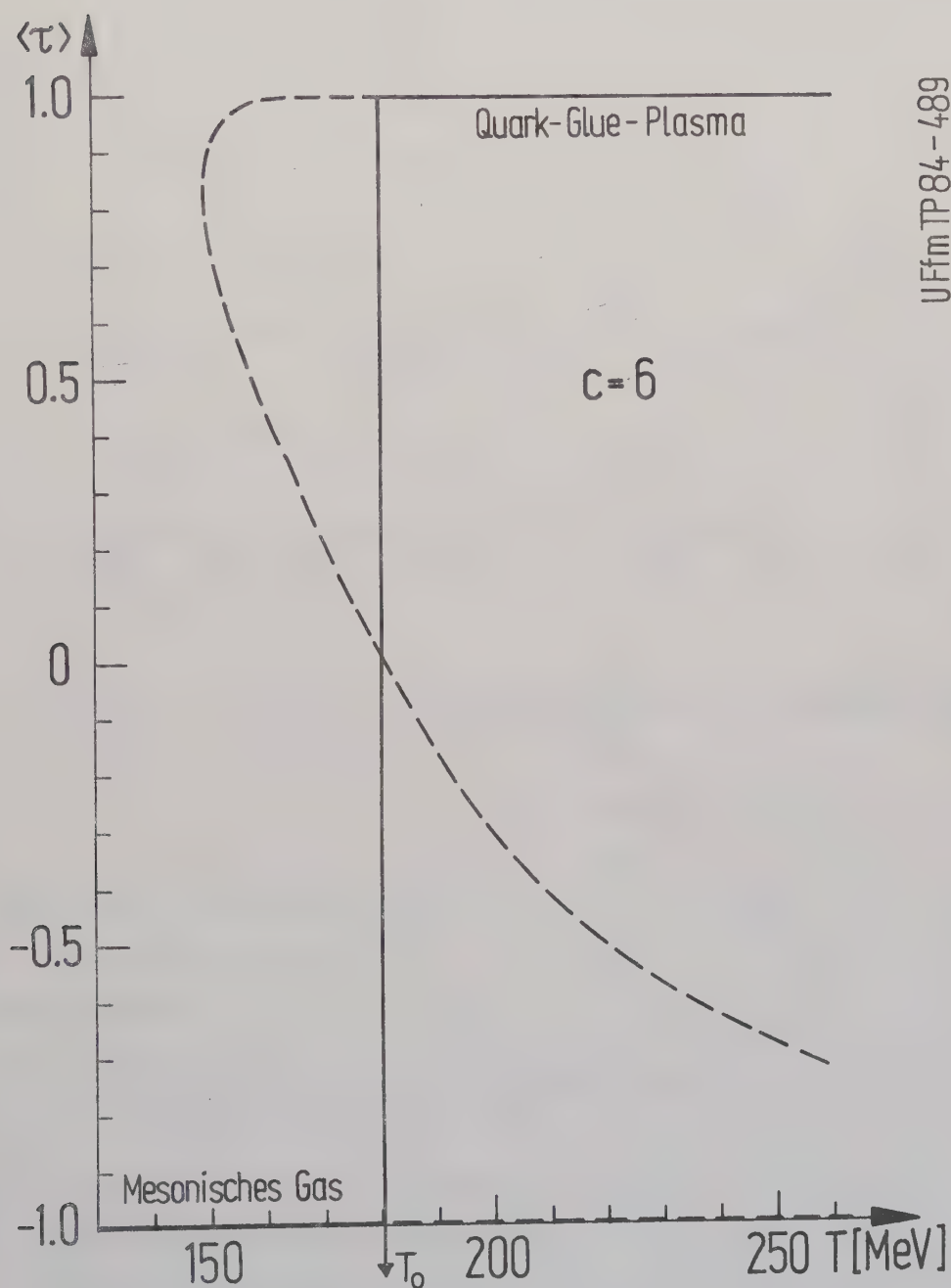


Fig.2o Abhängigkeit des Ordnungsparameters $\langle \tau \rangle$ von der Temperatur beim Übergang vom mesonischen Gas zur Quark-Glue-Plasmaphase

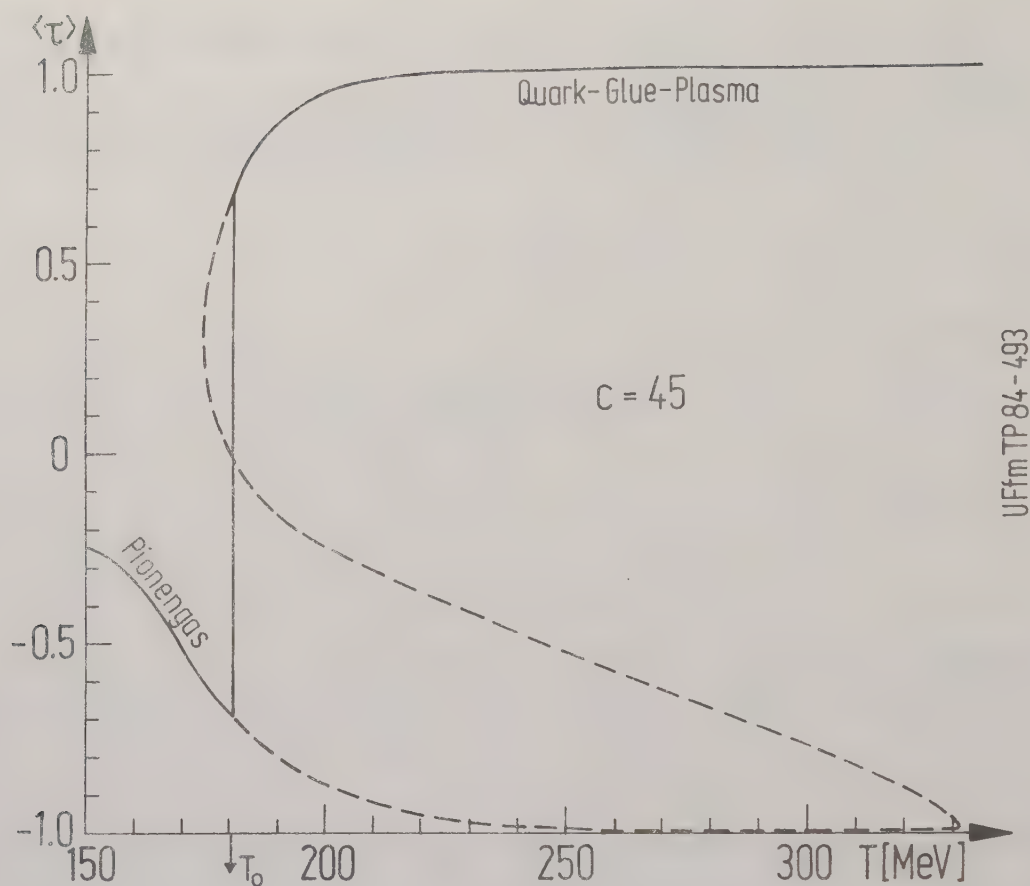


Fig.21 Abhängigkeit des Ordnungsparameters $\langle \tau \rangle$ von der Temperatur beim Übergang vom pionischen Gas zur Quark-Gluon-Plasmaphase

Physikalisch würde der zuletzt genannte Effekt bedeuten, daß bei abnehmender Temperatur wieder eine Zunahme der dem perturbativen Vakuum (i.e. Plasmatröpfchen) zugeordneten Links zu beobachten wäre - relativ zu Zuständen mit $\langle \tau \rangle \approx -1$, wo praktisch die gesamte Anregungsenergie des Systems in Mesonen (Pionen) u.ä. steckt. Allerdings darf man das in dem gegenwärtigen Stadium des Modells nicht ganz ernst nehmen, weil es bei tiefen Temperaturen immer wesentlichere Wechselwirkungseffekte noch nicht enthält.

Der schwächste Punkt des Tröpfchenmodells besteht aber sicher im Moment darin, daß die in Fig.20,21 und den folgenden mit Quark-Gluon-Plasma bezeichneten Äste nicht schon

wirklich den Plasmazustand beschreiben in dem Sinne, daß die Farblosigkeitslänge beliebig groß wird, sondern Zustände mit $\langle \tau \rangle \rightarrow 1$ enthalten hier zuletzt beliebig große zusammenhängende Cluster von Plasmatröpfchen endlicher Größe, $\lambda^3 \ll \infty$. Das wird natürlich dazu führen, daß am und oberhalb des Phasenübergangs das "Auftauen" der Farbfreiheitsgrade zu langsam mit steigender Temperatur vor sich geht im Sinne von Kap.3.2 (vgl.(III), S.88), so daß Druck und Energiedichte zu langsam dem Stefan-Boltzmann-Limit eines freien Quark-Glue-Plasmas entgegenstreben (s.u.).

Zur Berechnung von Druck und Energiedichte verwendet man:

$$(4.26) \quad \frac{1}{\lambda^3} \partial_\beta (\beta \Delta) = \frac{1}{8\lambda^3} \partial_\beta (\beta f_\pi + \beta f_M) = \frac{1}{8} (\epsilon_\pi + \epsilon_M),$$

wobei der mesonische und der Plasmaanteil der Energiedichte gegeben sind durch (siehe Glgen.(3.94)ff.):

$$(4.27) \quad \epsilon_\pi \equiv \frac{E_{(\sigma,0)}(T, v=\lambda^2, m_\pi=\sigma; B \equiv 0)}{\lambda^3} \\ = \frac{\pi^2}{4} T^4 \left\{ 2 \cdot 3 \cdot d_\sigma \cdot \frac{7}{60} + 8 \cdot d_\sigma \cdot \frac{8}{60} \right\} D_{\text{eff}}(T, \lambda) = 37 \cdot \frac{\pi^2}{30} T^4 D_{\text{eff}}(T, \lambda),$$

und,

$$(4.28) \quad \epsilon_M \equiv \frac{E_M(T, v=\lambda^2)}{\lambda^3} \stackrel{(4.7)}{=} 12 \cdot \frac{\pi^2}{30} T^4.$$

Entsprechend:

$$(4.29) \quad \frac{1}{\lambda^3} \partial_\beta (\beta \chi) = \frac{1}{4} (\epsilon_\pi - \epsilon_M).$$

Asymptotisch ($T \gg T_0$) gilt dann für Druck und Energiedichte mit den Glgen.(4.22,25) und $\langle \tau \rangle \approx 1$:

$$(4.30) \quad P \stackrel{(4.10,21)}{\cong} - \frac{2}{\lambda^3} \left\{ \frac{c}{8} (f_\pi + f_M) - T \ln \underbrace{\left(2 \cosh \beta c \left(\frac{3}{8} f_\pi - \frac{1}{8} f_M \right) \right)}_{\ll 0} \right\} \\ \cong - \frac{2}{\lambda^3} \left\{ \frac{1}{8} (f_\pi + f_M) + \frac{3}{8} f_\pi - \frac{1}{8} f_M \right\} = \frac{-1}{\lambda^3} f_\pi \xrightarrow{T \rightarrow \infty} P_{\text{Stefan-Boltzmann}}^{\text{Quark-Glue}},$$

und genauso:

$$(4.31) \quad \overset{(4.26,27)}{\varepsilon} \cong 2 \left\{ \frac{1}{8} (\varepsilon_{\mathcal{P}} + \varepsilon_{\mathcal{M}}) + 1 \cdot \left(\frac{1}{4} (\varepsilon_{\mathcal{P}} - \varepsilon_{\mathcal{M}}) + \frac{1}{8} (\varepsilon_{\mathcal{P}} + \varepsilon_{\mathcal{M}}) \right) \right\} = \varepsilon_{\mathcal{P}}.$$

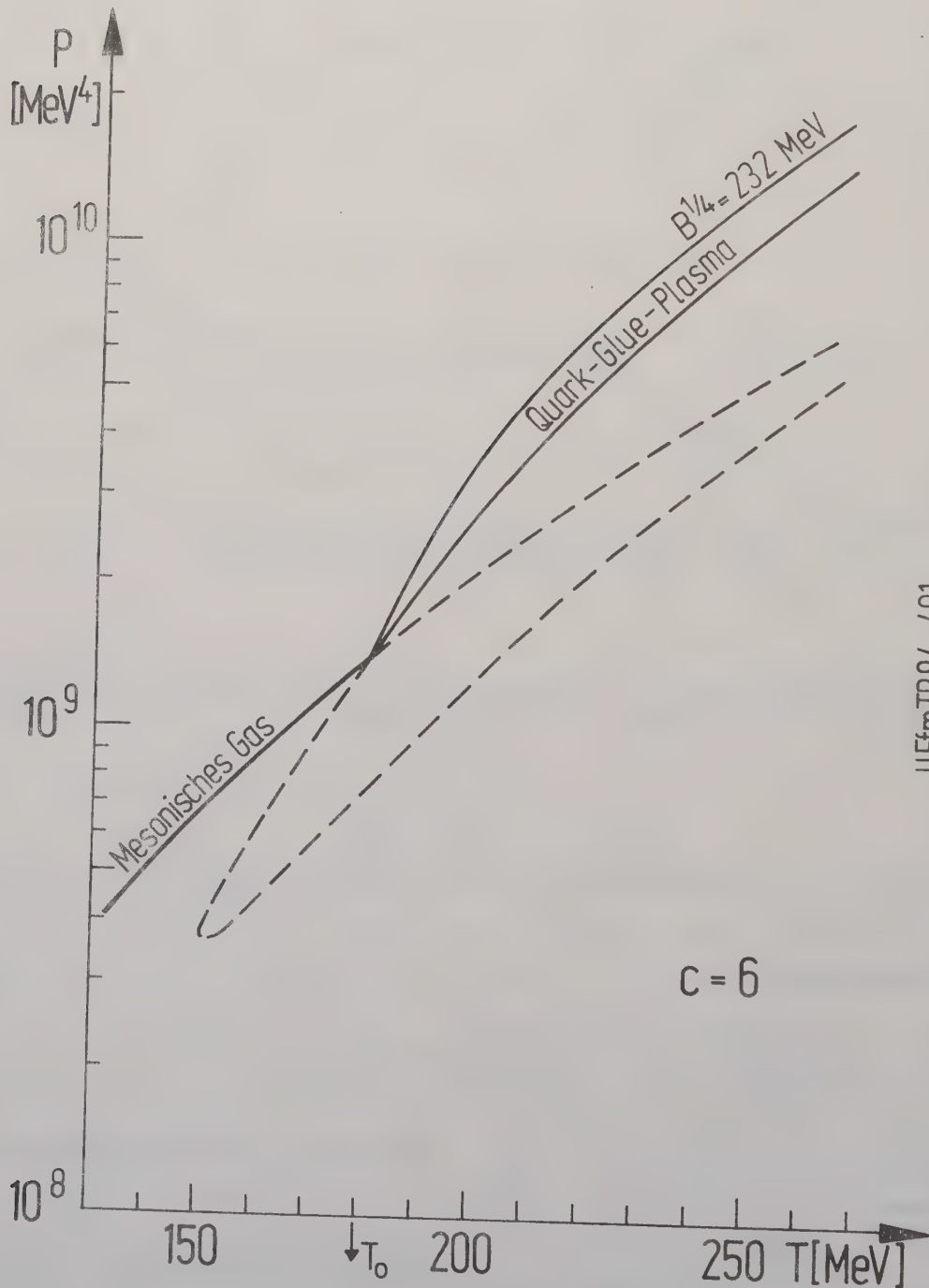


Fig.22 Temperaturabhängigkeit des Drucks P beim Übergang vom mesonischen Gas zum Quark-Gluon-Plasma (z.Vergl.: ideales Plasma mit Bag-Druck)

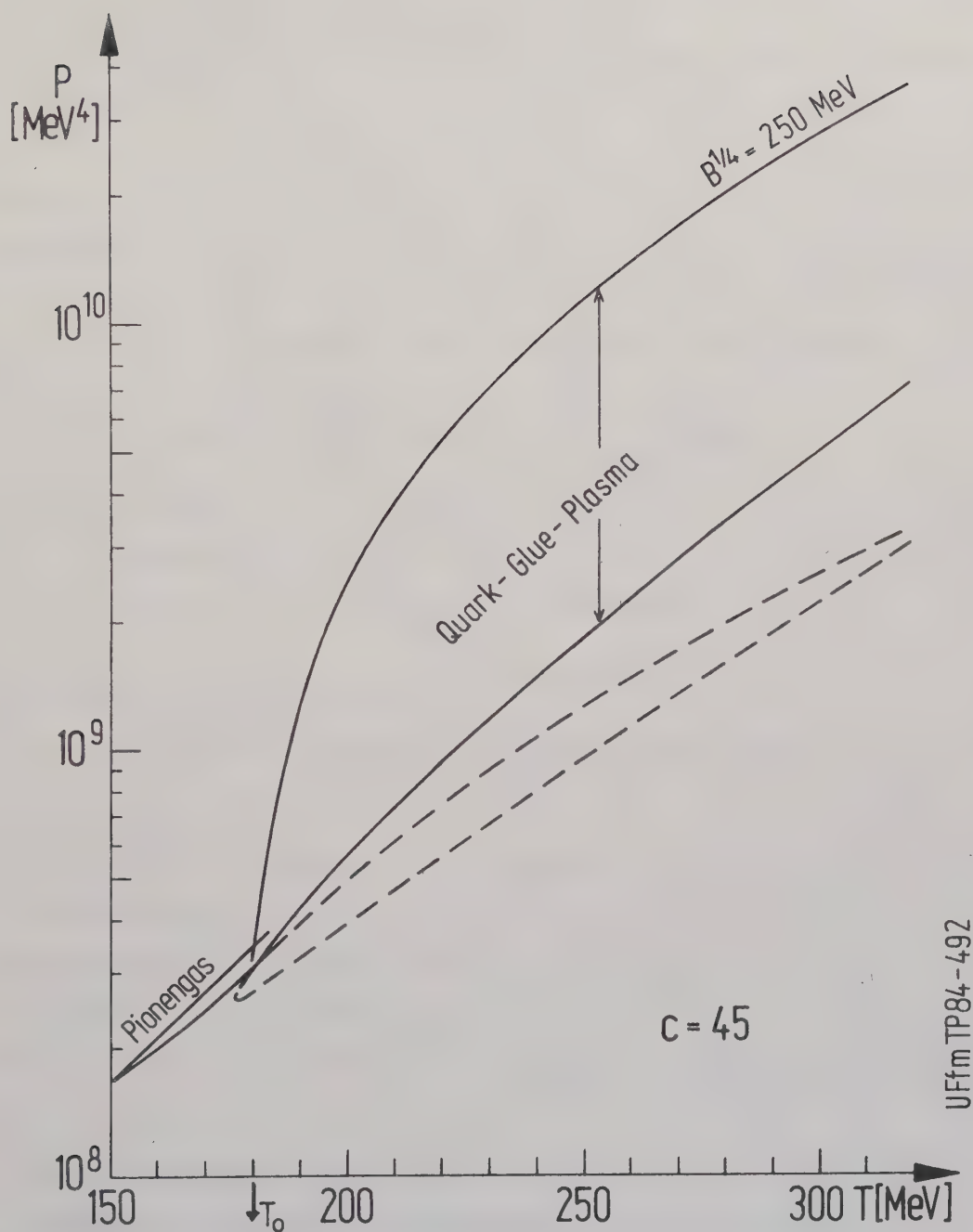


Fig.23 Temperaturabhängigkeit des Drucks P beim Übergang vom pionischen Gas zum Quark-Gluon-Plasma (z.Vergl.: ideales Plasma mit Bag-Druck)

In Fig.22,23 sieht man das tatsächliche Verhalten des Drucks, wobei für die numerischen Rechnungen die bereits erwähnten Parameter Verwendung fanden (s.S.116). Das System

befindet sich im Gleichgewicht jeweils in den durch ausgezogene Linien wiedergegebenen Zuständen maximalen Drucks, wohingegen die anderen Abschnitte der Kurven instabil sind ("Übersättigtes mesonisches Gas" bzw. "unterkühltes Quark-Glue-Plasma") und denjenigen in Fig.20,21 entsprechen.

In Fig.22,23 wurden zum Vergleich Resultate für ein simples Ideales-Gas-Modell mit Vakuumdruck eingetragen, das durch folgende Zustandsgleichung(en) definiert ist:

$$(4.32) \quad P \equiv \begin{cases} P_M = \frac{12}{90} \pi^2 T^4, & T < T_0 \\ P_{\text{Stefan-Boltzmann}}^{\text{Quark-Glue}} - B = \frac{37}{90} \pi^2 T^4 - B, & T > T_0 \end{cases};$$

(für Pionen: $12 \rightarrow 3$). Die Bag-Konstante B ist dann durch die Bedingung des Druckgleichgewichts bei $T=T_0$ gegeben:

$$(4.33) \quad P_M \stackrel{!}{=} P_{\text{Stefan-Boltzmann}}^{\text{Quark-Glue}} - B$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{37-12}{90} \pi^2 T_0^4,$$

so daß also der Phasenübergang bei derselben Temperatur T_0 wie im Tröpfchenmodell stattfindet. Man weiß von QCD-Gitterrechnungen her, daß die phänomenologische Zustandsgleichung, Glg.(4.32), das Verhalten des Systems gut wiedergibt (H.Satz i. Phys.Rep.88, Ref.[23]), weshalb sie hier als Vergleichsmaßstab dient.

Mit Glg.(4.19) findet man jetzt über das Tröpfchenmodell eine Verknüpfung zwischen Bag-Konstante B und Farblosigkeitslänge λ :

$$(4.34) \quad B^{1/4} \approx \lambda^{-1} \left(\frac{37-12(3)}{90} \pi^2 \cdot 1.55(.69) \right)^{1/4}$$

$$\approx 1.44(1.27) \lambda^{-1},$$

wobei die Werte in Klammern wieder für das "Pionengas" gelten (s.o.). Diese Beziehung ist mehr als eine Orientierung für das Tröpfchenmodell denn als quantitative Aussage zu

werten. Aber immerhin; man beachte die relative Unabhängigkeit des numerischen Faktors in Glg.(4.34) von den Annahmen im Detail bezüglich f_M , Glg.(4.7).

Aus Fig.23 wird besonders deutlich, daß das Tröpfchenmodell mit lokalisierten Anregungen in Form von Pionen alleine (gemäß Annahme A) praktisch nicht funktioniert. Der Phasenübergang ist viel zu schwach ausgeprägt im Vergleich mit der Zustandsgleichung (4.32), und das asymptotische Verhalten nähert sich kaum merklich dem eines asymptotisch freien Quark-Glue-Plasmas an. Wesentlich besser schneidet gemäß Fig.22 das Tröpfchenmodell mit der vergleichsweise hohen angenommenen Zahl von mesonischen Anregungen ab. Wie bereits auf Seite 119 erwähnt, kann man die verbliebene Diskrepanz für $T > T_0$ auf die Annahme einer konstanten Farblosigkeit zurückführen!

Ein ähnlich gutes bzw. schlechtes Ergebnis findet man auch bei Betrachtung der Energiedichten in Fig.24. Man beachte, daß die bei $T_0 \approx 180 \text{ MeV}$ ggf. freiwerdende latente Wärme des Phasenübergangs $\Delta \epsilon$ etwa 520 MeV fm^{-3} im Tröpfchenmodell gegenüber $1.509 \text{ GeV fm}^{-3}$ entsprechend der Zustandsgleichung (4.32) zusammen mit Glg.(4.33) beträgt, also nur etwa gut ein Drittel des vermutlich richtigen Wertes. - Der Phasenübergang scheint demnach im Tröpfchenmodell im bisher diskutierten Sinne immer etwas zu schwach ausgebildet, aber unter den gemachten, die tatsächlichen Verhältnisse grob vereinfachenden Annahmen funktioniert es doch recht gut.

Berechnung von Clusterverteilungen.

Zum Abschluß soll erwähnt werden, daß eine mehrfache Absicht hinter der Formulierung des durch die Glgen.(4.5-7) definierten Modells steht. Einmal handelt es sich um einen Versuch, im Zusammenhang mit der vorher durchgeführten Betrachtung von quantenstatistischen Plasmatröpfcheneigenschaften einen kleinen Schritt in Richtung auf ein besseres Verständnis der phänomenologischen Bag-Konstante und ihrer Konsequenzen zu tun, wozu die vorhergehenden Überlegungen

dienten. Daneben bietet ein lokales Modell aber auch die Möglichkeit, Eigenschaften des Systems zu untersuchen, die in der globalen Zustandsgleichung mit Bag-Term, Glq.(4.32), nicht mehr ausfindig zu machen sind. -

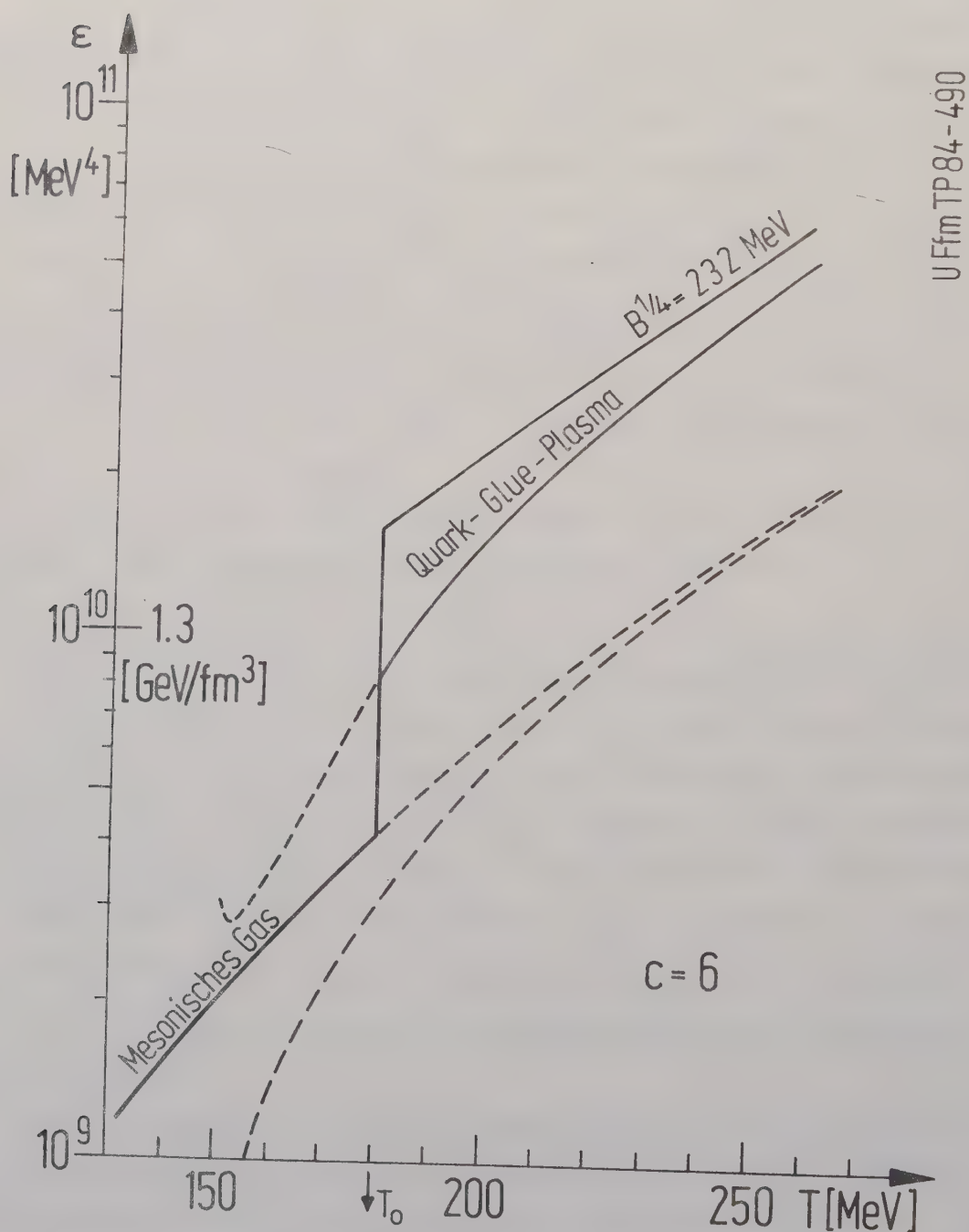


Fig.24 Temperaturabhängigkeit der Energiedichte ϵ beim Übergang vom mesonischen Gas zum Quark-Gluon-Plasma (z.Vergl.: ideales Plasma mit Bag-Druck)

Man könnte etwa wie im Ising-Modell selbst Korrelationen zwischen up-Spins - d.h. zwischen farblosen Plasmatröpfchen - an voneinander entfernten Orten betrachten [52] und die in Glg.(4.5) angenommene "Nächste-Nachbar-Kopplung" genauer untersuchen, wenn es um eine tiefere Begründung des Modells geht. - Außerdem kann man z.B. in der Nähe des Phasenübergangs nach der Zusammensetzung des Systems aus unterschiedlich großen Clustern gleichartiger Links bzw. unterschiedlich großen zusammenhängenden Bereichen perturbativen oder mesonisch angeregten Vakuums fragen, denn sie ist sowohl für die Erzeugung des Quark-Glue-Plasmas als auch seinen Zerfall von Bedeutung.

Ich werde das anhand der Frage illustrieren, was geschieht, wenn das System über die Temperatur T_0 hinaus schnell aufgeheizt wird, sich zunächst aber noch in der Phase befindet, die durch das "mesonische Gas" ($\langle \tau \rangle \approx -1$, s. Fig.2o) charakterisiert ist. - Es gibt dann natürlich bereits Keime der neuen Phase, die je nach Größe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftreten. Sei s die Anzahl der zusammenhängenden Links eines gerade betrachteten Plasmatröpfchen-clusters. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $W(s)$ für das Auftreten eines solchen Clusters gegeben durch das Verhältnis zweier Boltzmann-Faktoren:

$$(4.35) \quad W(s) \equiv \frac{e^{-\beta F(s)}}{e^{-\beta \bar{F}(s)}} ,$$

wobei $F(s)$ die freie Energie für einen Cluster mit s up-Spins ($\tau_i = +1$) gemäß Glg.(4.9) bezeichnet und $\bar{F}(s)$ die durch die Molekularfeldnäherung gegebene mittlere freie Energie eines gleichgroßen Bereiches (berechnet auf dem unteren, mesonischen Abschnitt des Phasendiagramms, Fig.2o):

$$(4.36) \quad \bar{F}(s) \equiv s \bar{F}(\langle \tau \rangle) ,$$

gemäß Glg.(4.15), und nach Glg.(4.9):

$$(4.37) \quad \bar{F}(s) = sC(\Delta + \chi) + \Delta \sum_{ij \in s}^{h.h.} \tau_i \tau_j .$$

Damit man die Zahl der Links eines s -Clusters definitiv angeben kann (i.e. die Summe in Glg.(4.37)), sei wie oben $c=6$ gewählt. Außerdem sei angenommen, daß sich die Links in dem betrachteten Cluster wie in einem einfachen kubischen Kristall und derart anordnen, daß die Anzahl der Links bei gegebenem s maximal ist.

Man erhält dann durch numerische Auswertung der Glg.(4.35) das in Fig.25 gezeigte Resultat für verschiedene Temperaturen $T > T_0$. - Durch stückweise gerade Linien sind jeweils zu einer festen Temperatur gehörende Werte von W angegeben; die Normierung der Werte für $s=1$ ist notiert. - Man beobachtet, daß $W(1) < 1$ gilt, daß dieser Wert aber mit der Temperatur ansteigt. Das bedeutet, daß der Mean-Field-Zustand, beschrieben durch Glg.(4.36), immer geringfügig günstiger ist als ein Einer-Cluster - weil insbesondere ein isoliertes Plasmatröpfchen keine Links zu nächsten Nachbarn haben kann, die die freie Energie gemäß Glg.(4.37) absenken ($\Delta < 0$, s.o.). Zuerst bleiben dann bei $T > T_0$ größere Cluster auch noch unterdrückt - d.h. gerade, daß man sich im Bereich des übersättigten mesonischen Gases befindet - solange sie nicht eine kritische Größe s_0 erreichen mit $W(s_0)=1$.

Für $s > s_0$ steigt dann die "Wahrscheinlichkeit" beliebig mit s an, was aber nichts anderes heißt, als das System in dem Moment in die neue Phase springt ($\langle \tau \rangle \approx 1$), wenn sich ein überkritischer Cluster mit $s=s_0+1$ gebildet hat und weiter anwächst; für $T=209\text{MeV}$ findet man $s_0=1$. - Ein interessantes Detail ist hierbei noch, daß wegen der diskreten Größe s der Cluster und der oben angenommenen lokalen Kristallstruktur $W(s)$ u.U. ein Zickzack-Verhalten aufweist (in der Fig.25 für $T=200\text{MeV}$); das unstetige Anwachsen der Anzahl von Links mit s führt zu diesem (Oberflächen-)Effekt.

Die Untersuchung des Tröpfchenmodells möchte ich hier mit dem Hinweis beenden, daß auch in [54] nach Clusterverteilungen gefragt wird, wobei jedoch die Zustandsgleichung (4.32) benutzt und zur Berücksichtigung von Endliches-Volumen-Effekten um einen Korrekturterm $\propto V^{1/3}$ erweitert wurde. Qualitativ stimmt das gefundene Verhalten mit dem anhand von Fig.25 erörterten überein.

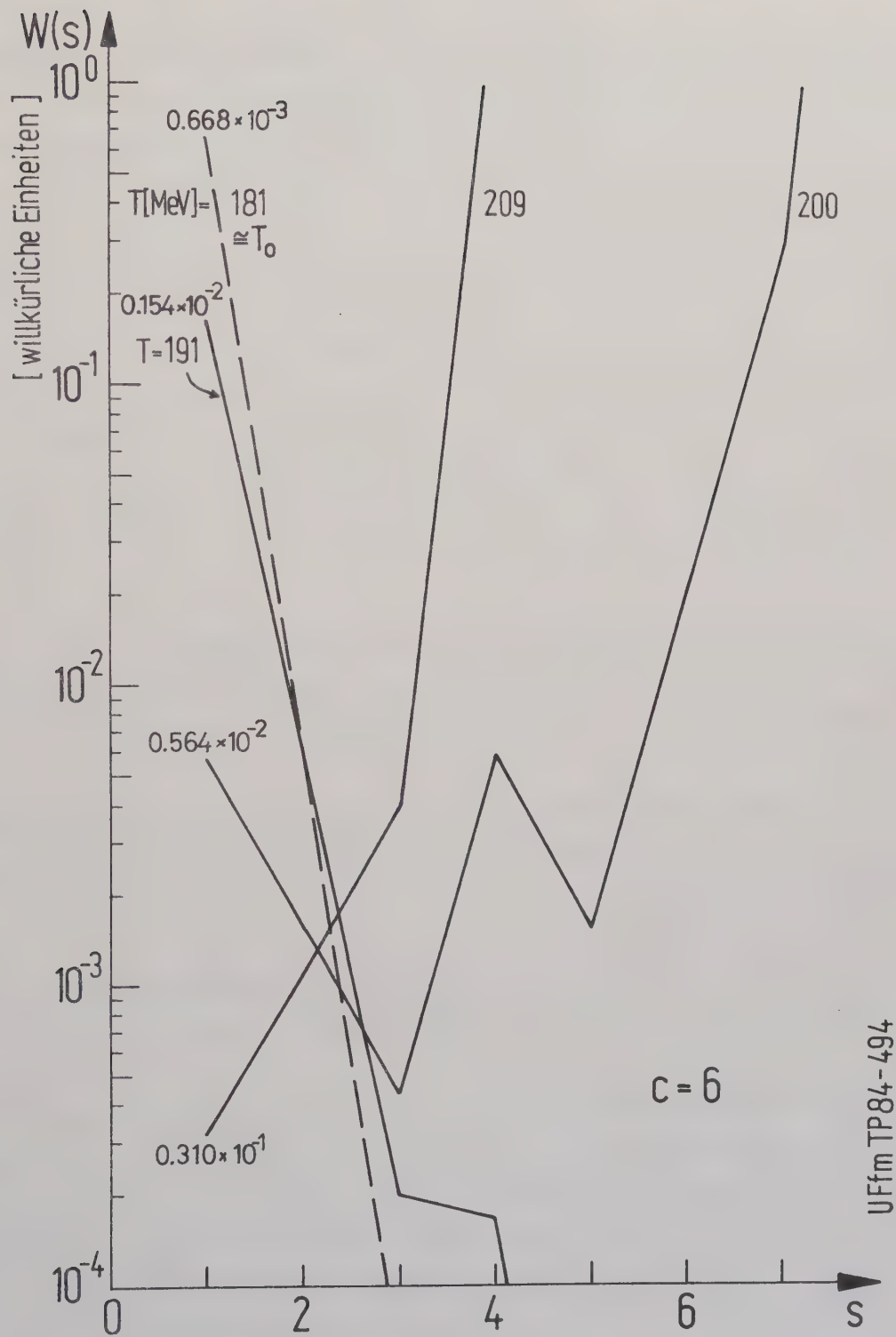


Fig.25 Die von der Größe s der Cluster abhängige Wahrscheinlichkeit W für ihr Auftreten bei verschiedenen Temperaturen $T > T_0$

5. Was zu tun bleibt

Mit der in Kap.3 dargestellten Untersuchung der thermodynamischen Eigenschaften kleiner, farbloser Quark-Glue-Plasmotropfen und der Entwicklung eines darauf aufbauenden Tröpfchenmodells des Phasenübergangs erster Ordnung zwischen Mesonengas und Quark-Glue-Plasma ist die Bedeutung und Anwendbarkeit der in den ersten Kapiteln eingeführten Projektionsmethode zur exakten Beschreibung ungebrochener innerer Symmetrien anschaulich gemacht worden. Zugleich mit den dort erhaltenen Ergebnissen wurden wiederholt auch Möglichkeiten angedeutet, in welche Richtungen man die Arbeit fortsetzen sollte, da die Beschreibung des Quark-Glue-Plasmas noch längst nicht in allen Aspekten als abgeschlossen anzusehen ist.

Besonders im Zusammenhang mit dem Tröpfchenmodell sind folgende Verbesserungen nahegelegt und zum Teil schon in der vorliegenden Arbeit vorbereitet worden:

1. Berücksichtigung der Endliches-Volumen-Effekte auf Grund diskreter Einteilchenenergieniveaus (etwa in den Glgen. (3.30)ff., S.58).
2. Störungstheoretische Behandlung der coulombartigen Restwechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen (s.S.29ff.).

Für das Tröpfchenmodell selbst stellt sich die Frage nach einer mikroskopischen Begründung, so daß man z.B. die angenommene Farblosigkeitslänge im Sinne eines Variationsparameters begreifen lernt. All diese Probleme stellen sich bei Betrachtung des Quark-Glue-Plasmas, darüberhinaus sind nach wie vor Konsequenzen hinsichtlich der Beobachtbarkeit zu untersuchen.

Zuletzt möchte ich darauf hinweisen, daß Anwendungen der Projektionsmethode bei der Beschreibung kernphysikalischer u.a. Systeme denkbar erscheinen. Außerdem sind Erweiterungen auf andere als die hier behandelten inneren Symmetrie-

gruppen zu untersuchen, etwa im Zusammenhang mit Raum-Zeit-Symmetrien. Hierhin gehört vielleicht auch das wichtige, ungelöste Problem der Schwerpunktskorrekturen in einem relativistischen Bag-Vielteilchensystem bzw. der Konstruktion seiner Impulseigenzustände.

Literaturverzeichnis

- [1] H.A.Bethe, Phys.Rev.50 (1936) 332
- [2] C.N.Yang, R.L.Mills, Phys.Rev.96 (1954) 191
 E.S.Abers, B.W.Lee, Phys.Rep.9 (1973) 1
 W.Marciano, H.Pagels, Phys.Rep.36 (1978) 137
- [3] R.Becker, Theorie der Wärme, Springer Verlag, 1966
- [4] V.B.Magalinskii, I.P.Terletsii, JETP 2 (1956) 143
- [5] M.Abramowitz, I.A.Stegun, Handbook of Math. Functions,
 Dover, 1970
- [6] J.Rafelski, M.Danos, Phys.Lett.97B (1980) 279
- [7] P.Koch, Diplomarbeit, Frankfurt 1983
 P.Koch, J.Rafelski, W.Greiner, Phys.Lett.123B (1983)151
- [8] Chr.Derreth, Diplomarbeit, Frankfurt 1984
 Chr.Derreth, H.-Th.Elze, W.Greiner, J.Rafelski,
 Phys.Rev.C , in press
- [9] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew, Taschenb.d. Mathematik,
 Verlag H.Deutsch, 1972
- [10] E.V.Shuryak, Phys.Rep.61 (1980) 71
- [11] J.J.Aubert et al., Phys.Lett.123B (1983) 275
- [12] A.W.Thomas, Univ.Adelaide prepr. ADP-300 (1984)
- [13] A.Chodos, R.L.Jaffe, K.Johnson, C.B.Thorn, V.F.Weiss-
 kopf, Phys.Rev.D9 (1974) 3471
- [14] H.Satz, Nucl.Phys.A400 (1983) 541c
- [15] J.Rafelski, M.Danos, Nat.B.St.rep. NBSIR83-2725 (1983)

- [16] H.-Th.Elze, J.Rafelski, W.Greiner,
Verh.DPG 9/1980 (1980) 1226, 6/1982 (1982) 1285
H.-Th.Elze, W.Greiner, P.Koch, B.Müller, J.Rafelski,
Verh.DPG 6/1983 (1983) 1191
H.-Th.Elze, W.Greiner, J.Rafelski,
GSI-Report 83-1 (1983) 132, Phys.Lett.124B (1983) 515
- [17] W.Miller, Symmetry Groups and Their Applications,
Academic Press, 1972
- [18] K.Redlich, L.Turko, Z.Phys.C5 (1980) 201
- [19] L.Turko, Phys.Lett.104B (1981) 153
- [20] H.Weyl, The Classical Groups, Princeton Univ.Pr., 1946
- [21] R.P.Feynman, Statistical Mechanics, Benjamin, 1972
- [22] B.Müller, The Physics of the Quark-Gluon Plasma,
lecture notes, Univ.Frankfurt prepr. UFTP125/83 (1983)
- [23] H.Satz, ed., Thermodynamics of Quarks and Hadrons,
North Holland, 1981
M.Jacob, H.Satz, eds., Quark Matter Formation and
Heavy Ion Collisions, World Scientific Publ., 1982
M.Jacob, J.Tran Thanh Van, eds., Quark Matter Format.
and Heavy Ion Collisions, Phys.Rep.88 (1982) 321
T.W.Ludlam, H.E.Wegner, eds., Quark Matter'83,
Nucl.Phys.A418 (1984) c
- [24] J.McL.Emmerson, Symmetry Principles In Particle Phys.,
Clarendon Press, 1972
- [25] D.B.Lichtenberg, Unitary Symmetry & Elementary Part.,
Academic Press, 1978
- [26] A.Th.M.Aerts, P.J.G.Mulders, J.J.de Swart,
Phys.Rev.D17 (1978) 260

- [27] H.-Th.Elze, W.Greiner, J.Rafelski,
GSI-Report 84-1 (1984) 144, Z.Phys.C24 (1984) 361
- [28] G.Schmidt, Doktorarbeit, Frankfurt 1983
- [29] M.Danos, J.Rafelski, Univ.Frankfurt prepr.
UFTP94/1982 (1982)
- [30] Y.Brihaye, P.Rossi, Lett.Math.Phys.8 (1984) 207
- [31] R.Arnowitz, S.Deser, Nucl.Phys.49 (1963) 133
- [32] J.D.Bjorken, S.D.Drell, Relativist. Quantenfeldtheor.,
Bibliographisches Institut, 1967
- [33] D.J.Gross, R.D.Pisarski, L.G.Yaffee,
Rev.Mod.Phys.53 (1981) 43
N.Weiss, Phys.Rev.D24 (1981) 475, D25 (1982) 2667
A.Actor, Phys.Rev.D27 (1983) 2548
- [34] V.Mangulis, Handbook of Series, Academic Press, 1965
- [35] H.-Th.Elze, W.Greiner, J.Rafelski,
J.Phys.G6 (1980) L149
- [36] I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik, Table of Integrals Series
And Products, Academic Press, 1965
- [37] J.Rafelski, H.-Th.Elze, R.Hagedorn,
CERN prepr. TH2912 (1980), Proc. 5th Europ. Symp. on
Nucl.-Antinucl.Interact., Bressanone 1980, CLEUP, 1980
- [38] O.K.Kalashnikov, V.V.Klimov, Phys.Lett.88B (1979) 328
- [39] T.Celik, J.Engels, H.Satz, Univ.Bielefeld prepr.
Bi-TP83/o4 (1983)
- [40] P.Hasenfratz, F.Karsch, I.O.Stamatescu,
Phys.Lett.133B (1983) 221

- [41] B.-S.Skagerstam, Phys.Lett.133B (1983) 419
- [42] J.B.Kogut, Rev.Mod.Phys.55 (1983) 775
I.G.Halliday, Rep.Progr.Phys.47 (1984) 987
- [43] J.W.Clark, J.Cleymans, J.Rafelski,
Univ.Cape Town prepr. September 1984
- [44] G.-C.Yang, L.-F.Luo, Phys.Lett.120B (1983) 201
- [45] M.I.Gorenstein, S.I.Lipshikh, V.K.Petrov,G.M.Zinovjev,
Phys.Lett.123B (1983) 437
- [46] M.Danos, J.Rafelski, Phys.Rev.D27 (1983) 671
- [47] A.Schnabel, Diplomarbeit, Frankfurt 1984
- [48] T.De Grand, K.Kajantie, Phys.Lett.147B (1984) 273
- [49] R.Hagedorn, Z.Phys.C17 (1983) 265
- [50] T.H.Hansson, K.Johnson, C.Peterson,
Phys.Rev.D26 (1982) 2069
- [51] P.O.Hess, R.D.Viollier, unpublished
- [52] R.Kubo, Statistical Mechanics, North Holland, 1965
R.Brout, Phase Transitions, Benjamin, 1965
- [53] L.S.Schulman, Techniques & Applic. Of Path Integr.
Wiley, 1981
- [54] J.I.Kapusta, Phys.Lett.143B (1984) 233 .

Lebenslauf

3.11.1952 Ich wurde in Frankfurt a.M. als der erste von drei Söhnen von Hans-Victor Elze und seiner Ehefrau Ruth E. Elze geb. Krausse geboren und kam dort auch in die Schule.

1959-1963 Nach den ersten zwei Jahren in Frankfurt verbrachte ich die nächsten beiden Volksschuljahre in Leichlingen/Rhld., wohin unsere Familie umzog.

1963-1971 Ich besuchte den neusprachlichen Zweig des Landrat-Lucas-Gymnasiums in Opladen bis zum Abitur.

1971-1972 Danach diente ich als einfacher Soldat in der Bundeswehr bei Koblenz.

1972-1975 Zum Wintersemester 72/73 konnte ich das Physikstudium an der Justus-Liebig-Univ. in Giessen beginnen, wo ich nach vier Semestern die Prüfung zum Vordiplom mit sehr gutem Erfolg ablegte.

1973 wurde ich in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen, die mich zehn Semester lang förderte und mir danach ein zweijähriges Promotionsstipendium gewährte.

1975-1979 Bis zum Abschluß als Diplomphysiker (sehr gut) studierte ich an der Friedrich-Wilhelms-Univ. in Bonn bei Prof.D.Schütte und Prof.K.Bleuler. Im Institut für theoretische Kernphysik fertigte ich eine Diplomarbeit über zwei analytisch lösbare Quasispinmodelle an und hatte eine Stelle als wissenschaftliche Hilfskraft inne.

6.7.1978 Unser Sohn Hans wird von meiner nicht ange-
trauten Frau Bärbel Kühn geboren.

1979-1984 Wir zogen gemeinsam nach Frankfurt, wo ich im Institut f. theoret. Physik der Joh.-Wolfgang-Goethe-Univ. als wissenschaftlicher Mitarbeiter angestellt bin.

Seit 1980 etwa arbeite ich an meiner Dissertation unter Anleitung von Prof.J.Rafelski und Prof.W.Greiner.

Meine akademischen Lehrer waren :

Prof.Dr.W.Biem

Prof.Dr.K.Bleuler

Prof.Dr.H.Bolterauer

Prof.Dr.R.Brockmann

Prof.Dr.Ch.Fenske

Prof.Dr.W.Greiner

Prof.Dr.S.Jaenisch

Prof.Dr.J.Kiefer

Prof.Dr.H.Löb

Prof.Dr.W.Lohmann

Prof.Dr.J.Rafelski

Prof.Dr.A.Scharmann

Prof.Dr.D.Schütte

Danksagung

Ich möchte Herrn Prof.Dr.Walter Greiner und Herrn Prof.Dr.Johann Rafelski für die Anregung zu dieser Arbeit danken und ihre fortwährende Unterstützung und Interesse.

Herrn Prof.Berndt Müller danke ich für gelegentliche hilfreiche Diskussionen.

Dankend möchte ich die Zusammenarbeit mit Peter Koch, Christian Derreth und Dr.Gerd Schmidt erwähnen, ebenso wie die freundlichen Tips von Karl-Heinz Ziegenhain für den Gebrauch des Computers.

Frau B.Utschig danke ich für das Zeichnen zahlreicher Figuren und Herrn Ph.Holzmann für den Druck.

Es sei anerkennend festgehalten, daß die benötigte Rechenzeit vom Rechenzentrum der Gesellschaft für Schwerionenforschung/Darmstadt zur Verfügung gestellt wurde.

Zu guter Letzt aber bedanke ich mich an dieser Stelle ausdrücklich und herzlich bei meinen Eltern, bei meiner Frau Bärbel und meinem Sohn Hans und bei Herrn Florian Berger für Geduld und Verständnis über viele Jahre hinweg.

